



Rüdiger Rodloff

Geometrische Optik

die "optimale" Verbindung zwischen zwei Punkten.

Juni, 2025

Rüdiger Rodloff
Birkenring 15
38536 Meinersen

Tel.: 05372 7123
mail: rrodloff@gmx.de
www.pixel-zoo.com
www.sagnac.de

Inhalt:

	Seite
1. Geometrische Optik – die optimale Verbindung zwischen zwei Punkten	7
2. Das Reflexionsgesetz	15
3. Brechung	18
4. Fokussierung von Licht	26
5. Asphärische Linsen	28
6. Brechung an einer Kugelfläche	38
7. Dünne Linsen	46
8. Abbildungen	53
8.1 Brennpunkt eines Linsensystems	61
8.2 Zwei-Linsen-System mit „teleskopischem“ Strahlengang	65
8.3 Hauptebenen	67
9. Optische Instrumente - Vorbemerkung zum Thema Vergrößerung	76
9.1 Optische Instrumente - Das Auge	79
9.2 Optische Instrumente - Die Lupe	91
9.3 Optische Instrumente - Mikroskop	99
10. Blenden – Einführung	105
10.1 Einfluss der Blenden auf die Bildhelligkeit	109
10.2 Einfluss der Blenden auf das Gesichtsfeld	121
10.3 Der Diaprojektor und seine Blenden	128
11. Fata Morgana – die Grenzen des Fermat'schen Prinzips	138
12. Zusammenfassung	147
Register	150

1. Geometrische Optik - die "optimale" Verbindung zwischen zwei Punkten.

Ein junger Mann steht am Ufer eines Sees und hört die Hilferufe eines Schwimmers!

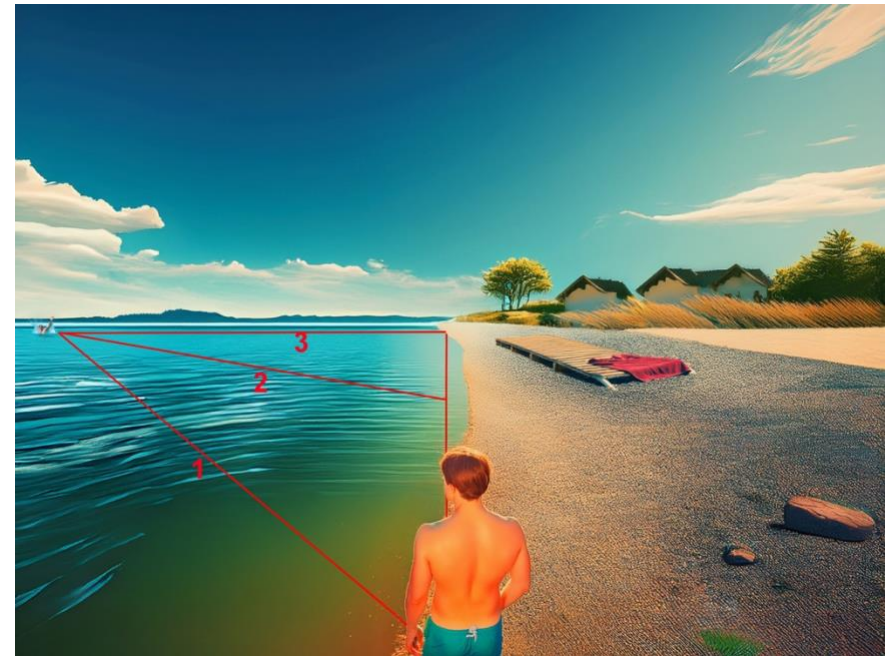


Bild 1.1: Was ist der schnellste Weg? (KI-generiertes Bild)

Der Retter will in der kürzest möglichen Zeit zu seinem Ziel gelangen. Es geht um die Frage welchem Weg (1,2 oder 3) er benutzen soll, wenn unterwegs mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten zu rechnen ist:

- langsam im Wasser
- schnell am Ufer

Da er vermutlich schneller laufen als schwimmen kann, wird er eine möglichst lange Strecke am Ufer und eine kürzere Strecke im Wasser zurücklegen

Überträgt man dieses Beispiel auf den Verlauf eines Lichtstrahls in einer Umgebung mit unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten, z.B. Luft und Glas oder Luft und Wasser, dann stellt sich eine ganz ähnliche Frage wie bei dem Rettungsschwimmer und darüber hinaus auch das grundsätzliche Problem: nach welchen Prinzipien breitet sich das Licht aus:

- Geradlinig?
- Auf dem kürzesten Weg?
- In der kürzesten Zeit?

Oder in welcher Form:

- Als Strahl?
- Als Welle?
- Als Teilchen?

Sie müssen nur das richtige Physiklehrbuch aufschlagen und Sie werden eine saubere Antwort finden (zumindest nach der Meinung des Autors):

"Licht besteht aus Teilchen (Quanten) und breitet sich geradlinig aus!"

Puristen ziehen daraus den Schluss, dass man Optik nur auf der Grundlage der Quantentheorie betreiben sollte. Ein - wie ich glaube - fataler Irrtum:

*Verständlicher wird die Angelegenheit dadurch nämlich auch nicht, denn, - "Die Natur, wie sie die **Quantenelektrodynamik** beschreibt, erscheint dem gesunden Menschenverstand absurd."*
(Zitat Richard Feynman)

Ein Phänomen 'verstehen' bedeutet, es auf vorhandene Erfahrungen zurückzuführen. In diesem Sinne leistet die

Sie sollten mal das Buch "QED - Die seltsame Theorie des Lichtes und der Materie" von **Richard P. Feynman** durchblättern! Feynman wird Sie sicher davon überzeugen, dass die Erscheinungen, die sich mit dem Licht verbinden nur durch die Quantentheorie richtig erklärt werden können.

Ein Beispiel für eine falsche Schlussfolgerung:
(Entnommen aus: www.psychologie.uni-heidelberg.de/ae/allg/enzykl_denken/Enz_04_Deduktion.pdf)

Feststellung: Wenn es regnet, ist die Straße nass.

Es regnet. → Also ist die Straße nass.

Die Straße ist nass. → Also regnet es?

Randbedingung für die geometrische Optik:

Die Wellenlänge ist klein im Verhältnis zu den Geräteabmessungen und die Photonenenergie ist klein im Verhältnis zur Empfängerempfindlichkeit.

Quantentheorie keinen Beitrag zum Verständnis und will das auch gar nicht.

Damit kein Zweifel entsteht: die **Quantentheorie** liefert auch nach meiner Meinung die richtigere und vollständigere Beschreibung optischer Phänomene, aber

... als Einstieg eignet sie sich nicht!

Sie würden einem Schulanfänger ja auch nicht mit Goethes Faust das Lesen beibringen, obwohl niemand bestreiten wird, dass der 'Faust' sprachlich wertvoller ist als die Schulfibel. Nein, - ich bin der festen Überzeugung, dass der beste Weg in ein unbekanntes Wissensgebiet über Modelle, Beispiele und Vergleiche führt, die - und das ist sehr wichtig! - aus dem Erfahrungsbereich des Lernenden stammt.

Wichtig ist dabei allerdings, dass man sich immer wieder bewusst macht, welches Modell man gerade benutzt und streng darauf achtet, die Modelle nicht zu vermischen. So manches 'Perpetuum-Mobile', so mancher Irrweg entsteht erst, wenn man die Randbedingungen des ersten mit den Schlussfolgerungen eines zweiten Modells verknüpft. Wir sollten deshalb die Randbedingungen, unter denen wir die Optik betrachten, sehr genau festlegen, - und vor allem darauf achten, dass wir diese im Verlauf der Diskussion nicht aus den Augen verlieren und möglicherweise dagegen verstoßen.

Für die geometrische Optik werden wir die Welleneigenschaften **und** den Teilchen-(Photonen)-Charakter des Lichtes vernachlässigen und in einer ersten groben Näherung die Ausbreitung des Lichtes als 'Strahl' beschreiben.

Der Begriff '**Strahl**' bzw. '**Lichtstrahl**' ist reichlich unscharf und beschreibt eigentlich nur die Tatsache, dass die Strahlungsenergie in einem sehr eng begrenzten Raumwinkel ('Strahlbündel') zwischen Sender und Empfänger transportiert wird.

Der 'Lichtstrahl' in Form einer Linie - deshalb „**geometrische Optik**“ - ist eine stark idealisierte (besser: „vereinfachende“) Annäherung an die Realität, aber für die Technik hat diese Form der Darstellung eine große Bedeutung und soll deshalb auch ausführlich diskutiert werden und ... Sie werden feststellen, dass auch dieses simple Modell uns oft die Grenzen unserer Vorstellungskraft aufzeigt.

Nach welchen Prinzipien findet denn nun die Ausbreitung der Lichtstrahlen statt?

Zunächst könnte man versucht sein zu sagen, dass die Geradlinigkeit für die Lichtausbreitung charakteristisch ist, - aber ein kurzer Blick auf einen Strohhalm im Wasserglas lässt den Verdacht entstehen, dass es mit der Geradlinigkeit nicht allzu weit her ist - zumindest dann, wenn der Lichtstrahl unterschiedliche Medien durchlaufen muss, z.B. Wasser und Luft, wie im Fall des Wasserglases.

Oder ein anderes Prinzip, das man zur Beschreibung der Lichtausbreitung benutzen könnte:

Hero von Alexandria (zwischen 150 - 250 n.Chr.) hat die Reflexion des Lichtes näher untersucht und daraus eine Regel abgeleitet die besagt, dass der Lichtstrahl bestrebt ist, den **kürzest möglichen Weg** zwischen zwei Punkten einzuschlagen. Aus dieser Regel lässt sich direkt die Tatsache herleiten, dass **Einfallswinkel** und **Ausfallswinkel** des Lichtstrahls - gemessen gegen die **Oberflächennormale** - gleich groß sein müssen (Bild 1.3).

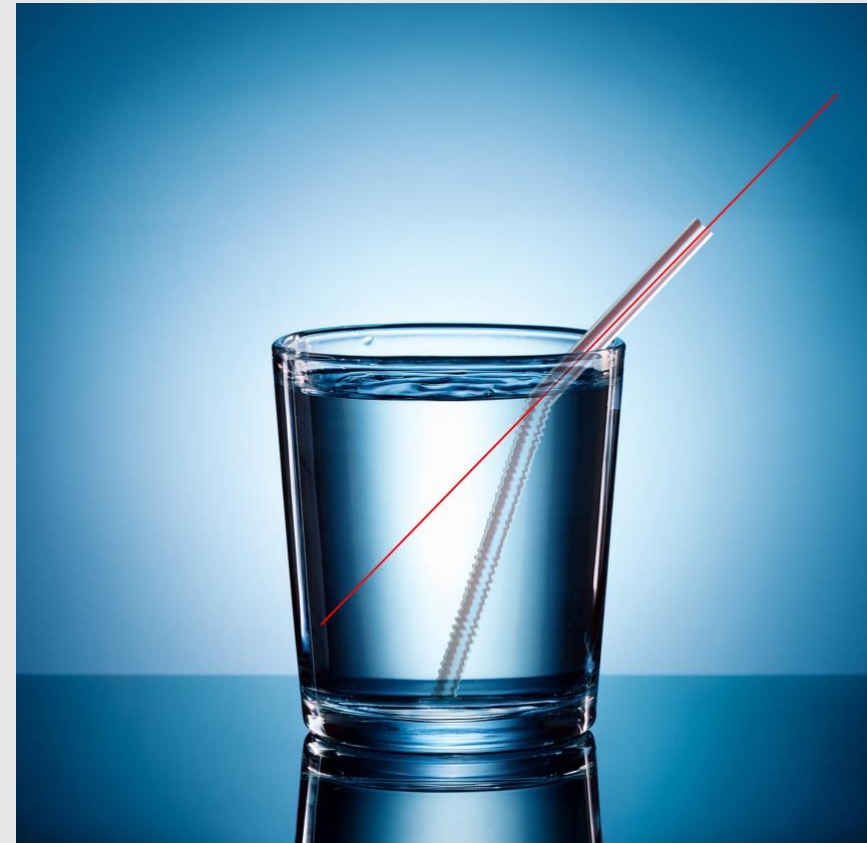


Bild 1.2: Trinkhalm im Wasserglas. Diesen Effekt kennen Sie. Er zeigt, dass die Lichtausbreitung beim Übergang Wasser-Luft nicht geradlinig verläuft. (Das der Strohhalm nicht geknickt ist merken Sie spätestens, wenn Sie den Halm wieder aus dem Wasser nehmen!)

Ein- und Ausfallswinkel werden in der Optik grundsätzlich gegen die Oberflächennormale, d.h. die Senkrechte auf der Oberfläche, gemessen

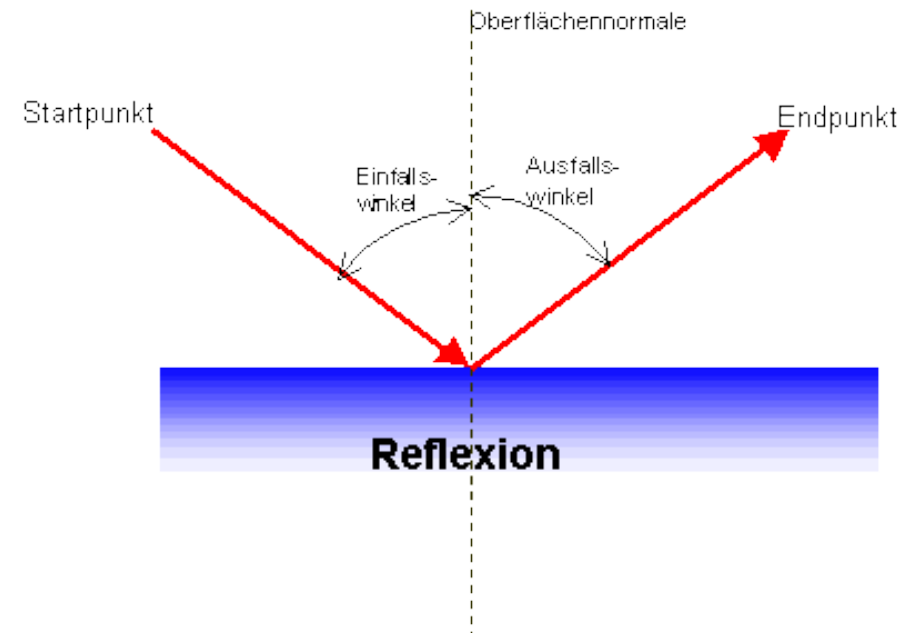


Bild 1.3: Reflexion an einer (Ober-)Fläche

(Ein kurzer "Beweis" - na ja, sagen wir: eine Plausibilitätsbetrachtung - des Reflexionsgesetzes findet sich im nächsten Kapitel.)

Soweit das Modell von Hero.

Hero's Modell hat aber leider einen Haken: es versagt bereits bei der Erklärung der Brechung, denn hier scheint der Strahl ja geradezu einen Umweg einzuschlagen, um an sein Ziel zu gelangen. Wenn der Lichtstrahl wirklich auf dem kürzesten Weg vom Start- zum Zielpunkt laufen würde, dann müsste er auf der Strecke laufen, die im Bild 1.4 gestrichelt eingezeichnet ist. Aber das tut er gerade nicht!

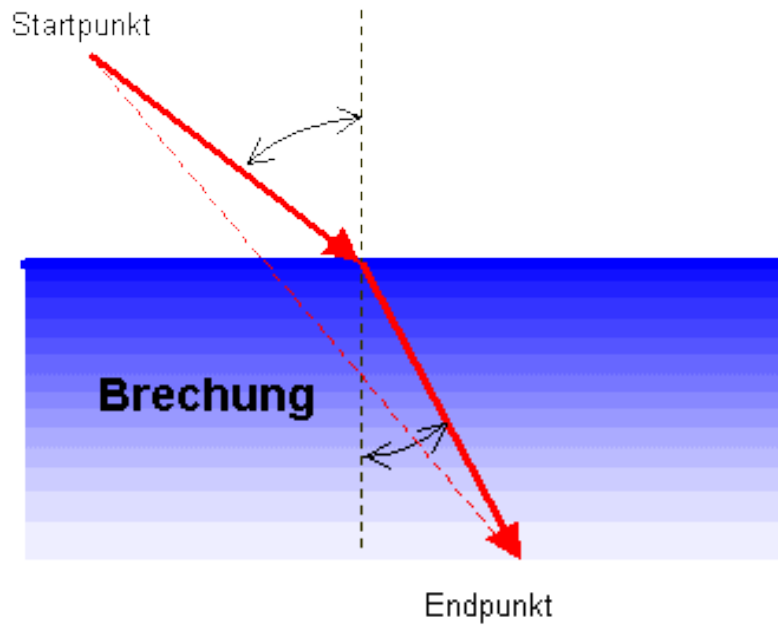


Bild 1.4: Brechung eines Lichtstrahls beim Übergang in ein anderes Medium.

1657 ersetzte **P. Fermat** das Prinzip des kürzesten Weges durch das **Prinzip der kürzesten Zeit**. Dieses Prinzip enthält die Idee, dass sich das Licht in den verschiedenen Medien verschieden schnell ausbreitet, denn sonst bestünde kein Grund, warum das Licht beim Wechsel von einem Medium in das andere die Richtung wechseln sollte.

Wenn es überall gleich schnell wäre, dann würde der Lichtstrahl natürlich auf dem direkten Weg vom Startpunkt zum Endpunkt laufen.

Das stimmt übrigens nicht! Sie finden das Fermat'sche Prinzip in den Lehrbüchern häufig in dieser vereinfachten, falschen Formulierung. Aus didaktischen Gründen habe ich mich entschlossen, diesen Unfug zunächst mitzumachen. In einem späteren Kapitel werden wir Herrn Fermat aber Gelegenheit geben, sein Prinzip sauberer zu formulieren

Sie erinnern sich an das Beispiel zu Beginn dieses Kapitels? Der "Retter" der einen Ertrinkenden auf dem schnellsten Weg erreichen will, wird auch nicht den direkten Weg einschlagen, sondern zunächst am Ufer entlang laufen um so die Distanz die er schwimmend zurücklegen muss so kurz wie möglich zu halten.

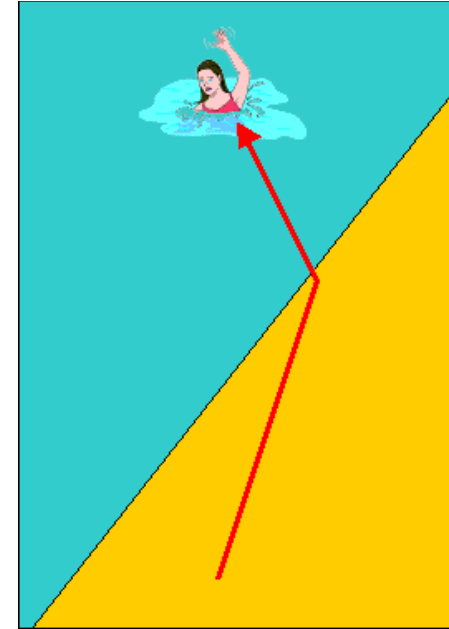


Bild 1.5: der schnellste Weg zum Unfall

Fermat hat mit der Formulierung dieses Prinzips ein mächtiges Werkzeug geschaffen.

Es ist wirklich verblüffend, mit welcher Eleganz sich aus dieser simplen Grundannahme nicht nur das Reflexions- und das Brechungsgesetz, sondern auch die fokussierende Wirkung von Linsen und Hohlspiegeln und schließlich die Phänomene bei der Lichtausbreitung in der Atmosphäre herleiten lassen.

Das Fermat'sche Prinzip erlaubt sogar eine (aller-)erste - zugegeben sehr unvollständige - Erklärung der Lichtbeugung am Spalt. Aber hier streifen wir bereits die Grenzen dieses Modells und geraten in Gefahr, die oben formulierten Randbedingungen (Vernachlässigung der Wellen- und der Photoneneigenschaft) zu verletzen; - doch dazu später mehr.

Sie sehen an diesen wenigen Beispielen, dass wir trotz der simplen Grundannahmen

- Lichtausbreitung als gerade Linie;
- kürzester Weg oder kürzeste Zeit?

schnell an einige sehr grundsätzliche Fragestellungen geraten und ich verrate Ihnen kein Geheimnis, dass wir uns am Ende dieses Weges uns mit einigen Fakten herumschlagen müssen, die unsere Alltagserfahrung auf eine harte, ja letztlich unüberwindliche Probe stellen. (Lichtgeschwindigkeit als Grenzgeschwindigkeit und eine neue Definition von Zeit und Raum!)

Aber zunächst wollen wir mal ganz klein anfangen und im Detail untersuchen, was das Fermat'sche Prinzip für die Beschreibung optischer Phänomene hergibt.

Also jetzt erstmal das Reflexionsgesetz im nächsten Kapitel!

Fermat'sches Prinzip (Original Formulierung):

"La lumière se propage d'un point à un autre sur une trajectoire telle que la durée du parcours soit minimale"

„Licht breitet sich von einem Punkt zum anderen auf einer Flugbahn aus, so dass die Dauer der Reise minimal ist

Anmerkung zum Fermat'sche Gesetz,

... woher weiß der Lichtstrahl eigentlich, welches der kürzeste Weg ist?

Mit dem Fermat'schen Prinzip wurde zum ersten Mal in der Naturwissenschaft ein Extremal- bzw. Minimalprinzip zur Beschreibung eines physikalischen Phänomens verwendet. Der große Erfolg dieser Betrachtungsweise hat in der Folgezeit viele Physiker inspiriert, diese Idee auch auf andere Bereiche zu übertragen. Vor allem in der Mechanik wurden Extremalprinzipien intensiv diskutiert. (Maupertuis, Euler, Lagrange, Hamilton) Eines der bekanntesten davon ist die Aussage, dass jedes physikalische System ein Potentialminimum anstrebt.

In den vergangenen Jahrhunderten wurde hier die ordnende Hand eines Schöpfers oder 'Organisators' gesehen, der z.B. den Lichtstrahl auf den 'richtigen Weg schickt', oder im Sinne eines sparsamen 'Hausvaters' dafür sorgt, dass z.B. die Energieverluste innerhalb eines Systems minimal bleiben.

Ist die Natur wirklich so ökonomisch im Umgang mit ihren Ressourcen? Und wenn ja, wie funktioniert das eigentlich im Detail? Kann der Lichtstrahl - wie R. Feynman es in seinem Lehrbuch formuliert - den richtigen Weg 'riechen'?

Wohl kaum!

Eigentlich muss man ja nur das Modell zu wechseln. Wenn statt der Strahlenoptik die Wellen- oder Quantentheorie zur Herleitung des Brechungsgesetzes benutzt wird, löst sich der ganze metaphysische Spuk im Nu auf. Aber ich fürchte, der Hinweis auf andere Modelle ist nicht sehr hilfreich, denn wer in den Naturgesetzen den Fingerzeig Gottes sehen will, der wird sich davon nicht abbringen lassen, auch wenn Sie noch so viele Gegenargumente zitieren - warum sollte er auch?

Und noch ein Gedanke: Die sogenannten "Naturgesetze" in der Physik können immer nur ein Abbild der Logik des Menschen sein, der sie "entdeckt", bzw. beschrieben hat. Wir werden uns in den Naturgesetzen im besten Fall selbst wiederfinden. Erkenntnisse die über den menschlichen Horizont hinausreichen, oder gar irgendeine grundsätzliche oder außer-menschliche Wahrheit enthalten, liefern sie nicht!

Eigentlich ist es unsinnig den Ansatz von Hero zu verwenden. Wir hatten ja bereits im Kapitel 1 gesehen, dass Hero's Modellvorstellung zur Lichtausbreitung auf dem kürzesten Weg gar nicht richtig sein kann, weil es die Brechung des Lichtes nicht erklärt, - aber ein solches Vorgehen treffen Sie in der Physik häufig an : ein Modell wird solange benutzt, solange es richtige Ergebnisse liefert (der Zweck heiligt die Mittel ?) - und wenn man mit dem Modell an die Grenzen stößt muss man es eben durch ein besseres (= vollständigeres) ersetzen.

2. Das Reflexionsgesetz

Das Reflexionsgesetz kennt jeder.

„**Einfallswinkel = Ausfallswinkel** - wozu also noch begründen?
Na eben - der Vollständigkeit halber!

Wir werden dazu das Modell von Hero verwenden! Im folgenden Bild ist die Ausgangssituation dargestellt:

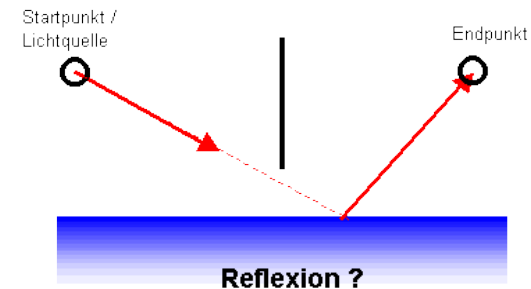


Bild 2.1: Reflexion eines Lichtstrahls an einer Grenzfläche.

Ein Lichtstrahl soll über die Reflexion an einer (Ober)Fläche auf dem **kürzest möglichen Weg** vom "Startpunkt" (Lichtquelle) zum "Endpunkt" gelangen. Im folgenden Bild sind mehrere Möglichkeiten eingezeichnet. Welches davon ist wohl der kürzeste Weg, a, b oder c?

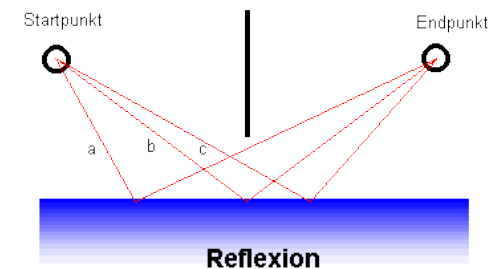


Bild 2.2: Reflexion – welches ist der kürzeste Weg?

Man könnte das natürlich einfach mit dem Lineal ausmessen, - aber vielleicht geht es auch etwas intelligenter. Im Bild 2.3 wird der "Endpunkt" des Lichtweges an der reflektierenden Fläche gespiegelt:

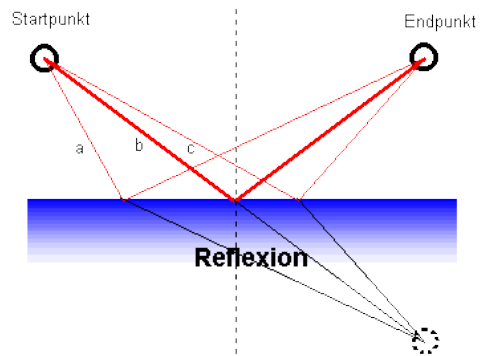


Bild 2.3: Reflexion – auf der Suche nach dem kürzesten Weg.

Wenn man nun die Strahlen a, b und c bis zu diesem gespiegelten Endpunkt verlängert, dann deutet sich das Ergebnis sofort an:

'b' hat offensichtlich den kürzesten Weg bis zu dem neuen Endpunkt zurückzulegen, - die beiden anderen machen einen Umweg. Im Bild 2.4 wird diese Situation noch einmal für die Winkel dargestellt.

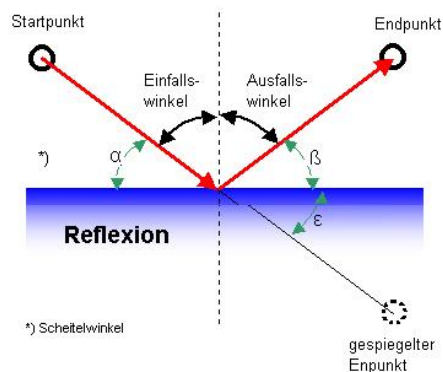


Bild 2.4: Reflexionswinkel

Der Winkel β zwischen der reflektierenden Oberfläche und dem reflektierenden Strahl ist natürlich gleich dem Winkel ε zwischen dem Strahl in Richtung zum "gespiegelten Endpunkt" und der Reflexionsfläche, - das ergibt sich aus der Konstruktion des "gespiegelten Endpunktes".

Da andererseits der Winkel α genauso groß ist wie ε (Scheitelwinkel) folgt daraus direkt, der

Einfallswinkel α ist genauso groß wie der Ausfallswinkel β

Uff, - dass war mühsam! Ich habe das so ausführlich dargestellt um ein Prinzip deutlich zu machen, dass uns auch in den folgenden Kapiteln begleiten wird - aus einer einzigen Idee lassen sich sehr konkrete und später auch komplexe Gesetzmäßigkeiten herleiten.

Ob sich der Aufwand für das simple Reflexionsgesetz gelohnt hat, müssen Sie selbst entscheiden.

Das Modell von Hero werden wir in den folgenden Kapiteln verlassen, und durch das bereits erwähnte Fermat'sche Prinzip (Seite 14) ersetzen.

Übrigens: - das Modell von Hero hat in diesem Fall zu einem richtigen Ergebnis geführt, weil das Prinzip des kürzesten Weges identisch ist mit dem Prinzip der kürzesten Laufzeit (Fermat), solange das Licht im gleichen Medium bleibt und deshalb nicht die Geschwindigkeit wechselt.

2. Brechung

Die eigentliche Bewährungsprobe für das Fermat'sche Prinzip war das Brechungsgesetz.

Zwar hatten Willebrod Snel van Rojen (**SNELLIUS**, 1591-1626) und Rene Descartes (1596-1650) diese Formel sehr viel früher entdeckt, aber aus heutiger Sicht falsch interpretiert. Snellius hatte entdeckt, dass das Verhältnis der Sinusse von Einfallswinkel und Brechungswinkel eine Konstante ist, wenn ein Lichtstrahl vom dünneren Medium (z.B. Luft) in ein dichteres Medium (z.B. Wasser) wechselt. Mathematisch ausgedrückt:

$$3.1 \quad \sin \alpha / \sin \beta = \text{const}$$

Descartes hatte diese Formel auch ermittelt, allerdings auf der Basis eines mechanischen Modells und unter der Annahme, dass die Lichtgeschwindigkeit im optisch dichteren Medium (z.B. Glas, Wasser) größer ist als im dünneren Medium (z.B. Luft) - tatsächlich ist es aber genau umgekehrt!

Fermat hatte bei seiner Herleitung des Brechungsgesetzes das Prinzip der kürzesten Zeit verwendet und gleichzeitig angenommen, dass die Lichtgeschwindigkeit im optisch dichteren Medium (z.B. Glas, Wasser) langsamer ist als im dünneren (z.B. Luft). - Lesen Sie dazu den Brief von Fermat an de la Chambre, - links!

Also gut, - fangen wir an:

Ungefähr so könnte der Verlauf des Lichtstrahles aussehen, - wenn Fermat recht hat! Hier die Skizze mit den notwendigen Parametern:



Bild 3.1/3.2: Rene Descartes (1597-1650) Snellius (1591-1626)

Es ist wirklich verblüffend, dass Descartes trotzdem ein richtiges Ergebnis erhielt. Ein schönes Beispiel dafür, dass physikalische Modelle nicht unbedingt etwas mit der "Wirklichkeit" zu tun haben müssen!

Brief von Fermat an C.de la Chambre 1662: ... fand ich, dass mein Prinzip der Lichtbrechung zu genau derselben Proportion führte, die auch Herr Descartes aufgestellt hatte. Dieses völlig unvorhergesehene Ergebnis hat mich derart überrascht, dass ich vor Verwunderung kaum zu mir kam. Ich habe meine algebraischen Operationen auf verschiedene Weisen wiederholt. Das Ergebnis war jedes Mal dasselbe, **obwohl mein Beweis auf der Annahme beruht, das Licht pflanze sich in dichteren Medien langsamer fort als in dünneren**, was ich für einzig vernünftig und notwendig halte, im Gegensatz zu Herrn Descartes, der das Gegenteil behauptet.

Einfallswinkel α und Ausfallswinkel β werden gegen die sog. 'Oberflächennormale' gemessen. Die 'Oberflächennormale' ist die Senkrechte auf der Oberfläche des Glaskörpers.

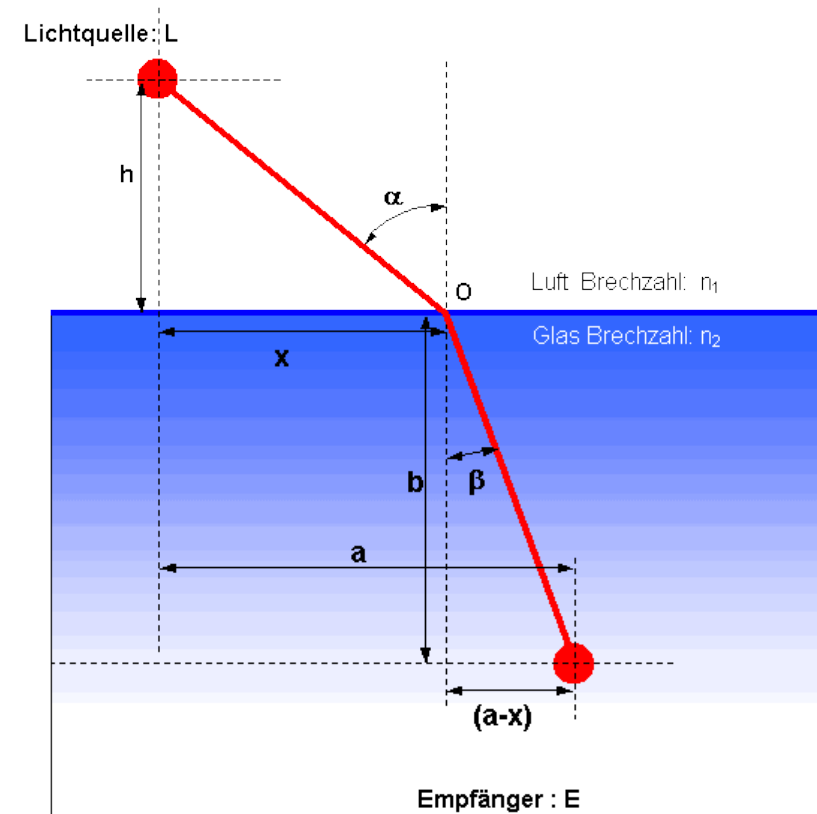


Bild 3.3: Parameter zur Brechung.

Aber "ungefähr" reicht uns nicht, wir wollen es schon genauer wissen!

Ich habe mir lange den Kopf darüber zerbrochen wie ich Ihnen die Mathematik, die jetzt kommt, ersparen kann - es ist mir kein Ausweg eingefallen. Also gehen wir es an, es tut auch nicht weh!

Da nach dem Fermat'schen Prinzip die Laufzeit τ von der Lichtquelle L bis zum Empfänger E so kurz wie möglich sein soll, muss zunächst die Laufzeit des Lichtstrahls von der Lichtquelle L über den Eintrittspunkt O bis zum Empfänger E berechnet werden:

$$3.2 \quad \tau = \frac{\overline{LO}}{v_{\text{Luft}}} + \frac{\overline{OE}}{v_{\text{Glas}}}$$

Wobei v_{Luft} und v_{Glas} die Geschwindigkeiten des Lichtes zunächst in der Luft / Medium 1 (s.o.) und anschließend im Glas / Medium 2 sein soll.

Sie erinnern sich doch an den Satz des Pythagoras? Mit Hilfe dieses Satzes ersetzen wir die Strecken LO und OE:

$$3.3 \quad \tau = \frac{\sqrt{b^2 + x^2}}{v_{\text{Luft}}} + \frac{\sqrt{b^2 + (a-x)^2}}{v_{\text{Glas}}}$$

Die Koordinate x beschreibt den Eintrittspunkt des Lichtstrahles auf der Glasoberfläche. Die Aufgabe besteht nun darin, den Eintrittspunkt zu finden, für den die Laufzeit τ minimal wird. Zu diesem Zweck müssen wir den Ausdruck für τ differenzieren und anschließend gleich Null setzen:

$$3.4 \quad \frac{d\tau}{dx} = \frac{x}{v_{\text{Luft}} \cdot \sqrt{b^2 + x^2}} + \frac{-(a-x)}{v_{\text{Glas}} \cdot \sqrt{b^2 + (a-x)^2}} = 0$$

Ein Blick auf die Skizze im Bild oben zeigt, dass sich diese Beziehung durch die Einführung von Einfallswinkel und Ausfallswinkel erheblich vereinfachen lässt.

Aus dem Bild lässt sich ablesen, dass der Sinus des Einfallswinkels sich auch so ausdrücken lässt:

$$3.5 \quad \sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{b^2 + x^2}}$$

Pythagoras - Wie war das noch?

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadrate der Katheten a und b **) gleich dem Quadrat der Hypotenuse c*): $a^2 + b^2 = c^2$

*) Hypotenuse ist die Seite gegenüber dem rechten Winkel.

**) Katheten sind die Seiten neben den rechten Winkel.

→ Mit diesem Trick bestimmen die Mathematiker den Extremwert einer Funktion, - in unserem Fall suchen wir den Minimalwert der Laufzeit τ

Ist Ihnen etwas aufgefallen?

Nach den Regeln der Differentialrechnung haben wir zwar einen Extremwert der Funktion $\tau(x)$ bestimmt, aber ob dabei die minimale oder sogar die maximale Laufzeit herausgekommen ist, haben wir nicht untersucht! Trotzdem wird das Ergebnis richtig sein! - Hier deutet sich bereits an, dass das Fermat'sche Prinzip mit der Formulierung "Der Lichtstrahl verbindet zwei Punkte in der kürzesten Zeit" zumindest einer Erläuterung bedarf!

Wir kommen darauf zurück, - später.

Sinusse' - gibt es diesen Plural?

Der Sinus des Ausfallswinkels ergibt sich aus:

$$3.6 \quad \sin \beta = \frac{(a-x)}{\sqrt{b^2 + (a-x)^2}}$$

Wenn Sie diese Ausdrücke für den Einfallswinkel (3.5) und den Ausfallswinkel in die Gleichung (3.6) einsetzen, dann wird die Angelegenheit plötzlich sehr übersichtlich:

$$3.7 \quad \frac{\sin \alpha}{v_{\text{Luft}}} = \frac{\sin \beta}{v_{\text{Glas}}}$$

Oder vielleicht gefällt es Ihnen so besser:

$$3.8 \quad \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

d.h., die 'Sinusse' - der beiden Winkel verhalten sich wie die Ausbreitungsgeschwindigkeiten in den jeweiligen Materialien und das ist genau die Beziehung, die Snellius und Descartes auch angegeben hatten:

$$3.9 \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \text{const}$$

allerdings war die Bedeutung der Konstante noch unklar!
Diesen Punkt sollten wir noch etwas genauer betrachten:

... das Verhältnis der Geschwindigkeiten v_1/v_2 wird im allgemeinen als '**Brechungsindex**' n_{12} eines bestimmten Mediums (1) gegenüber einem anderen (2) bezeichnet, also:

$$3.10 \quad \frac{v_1}{v_2} = n_{12}$$

Obwohl der Brechungsindex eigentlich das Verhältnis der Ausbreitungsgeschwindigkeiten in zwei verschiedenen Materialien kennzeichnet, haben Sie vielleicht schon davon gehört, dass man oft auch vom Brechungsindex eines einzigen Materials spricht. Hier hat sich eine gewisse Schlampigkeit in der Bezeichnung eingeschlichen, - gemeint ist nämlich auch hier eine

Verhältnisangabe, und zwar die Vakuumlichtgeschwindigkeit v_0 im Verhältnis zur Geschwindigkeit des Lichtes im jeweiligen Material.

Der Brechungsindex von Glas müsste danach so definiert werden:

$$3.11 \quad n_{\text{Glas}} = \frac{v_0}{v_{\text{Glas}}}$$

Oder etwas allgemeiner:

$$3.12 \quad n_{ik} = v_i/v_k = (v_0/v_i)/(v_0/v_k) = n_k/n_i$$

Mit anderen Worten: der Brechungsindex zwischen zwei Materialien lässt sich aus den Brechungsindizes der einzelnen Materialien gegenüber einem dritten, z.B. dem Vakuum, bestimmen. Unter Verwendung dieser Definitionen schreibt sich das Brechungsgesetz dann so:

$$3.13 \quad \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = n_{12} = \frac{n_2}{n_1}$$

Speziell für den Übergang Luft / Glas gilt:

$$3.14 \quad \frac{\sin \alpha_{\text{Luft}}}{\sin \alpha_{\text{Glas}}} = n_{\text{Luft, Glas}} = \frac{n_{\text{Glas}}}{n_{\text{Luft}}} \approx n_{\text{Glas}}$$

da der **Brechungsindex von Luft** sehr dicht bei '1' liegt ($n_{\text{Luft}} = 1,000276$ s.o.).

Wo liegt nun der substanzielle Unterschied zum Brechungsgesetz von Snellius? Snellius hatte auf rein empirischen Weg herausgefunden, dass das Verhältnis der Sinusse von Einfallswinkel und Brechungswinkel eine Konstante ist, also

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \text{const}$$

(Ich hatte das bereits eingangs erwähnt.)

Brechungsindex einiger Materialien gegen Luft:

Luft (gegen Vakuum)	1,000276
Eis (bei 0°C)	1,31
Wasser	1,33
Quarzglas	1,45
Plexiglas	1,49
Glas (BK7)	1,51
Steinsalz	1,54
Diamant	2,42

Als ich eben die optische Weglänge im Wasser in der Einheit "cm" angegeben habe, habe ich einen Moment gezögert. Formal ist der Brechungsindex ein Verhältnis von zwei Geschwindigkeiten, s.o., also dimensionslos. Für die Dimension der optischen Weglänge, ergibt sich deshalb einfach eine Länge. So weit so einfach!

Aber geht es Ihnen nicht auch so: Mit dem Begriff "Weglänge" verbinden wir die Vorstellung einer geometrischen Größe. Ein Weglängenstück von 10 cm bleibt 10 cm, egal ob es im Vakuum, im Wasser oder im Glas liegt. Gemeint ist mit dem Begriff der "optischen Weglänge" aber etwas anderes: Obwohl der Begriff "optische Weglänge" eine geometrische Größe suggeriert, ist damit viel eher eine Maßzahl für die **Laufzeit des Lichtstrahls** in den verschiedenen Medien gemeint.

Für den Übergang Luft Wasser beträgt diese Konstante 1,33. Ist das nicht die gleiche Aussage wie die des oben hergeleiteten Brechungsgesetzes?

Nein! - Durch die Fermat'sche Herleitung des Brechungsgesetzes wird deutlich, dass sich hinter der Konstanten ('const') das Verhältnis der Ausbreitungsgeschwindigkeiten verbirgt.

Wenn man also für zwei Materialien die Ausbreitungsgeschwindigkeiten kennt, dann ist es nach der Fermat'schen Formulierung sofort möglich eine Voraussage über die Lichtbrechung zu machen, - genau das leistet die Snellius-Formel aber nicht.

Bei dieser Gelegenheit sollten wir kurz den Begriff der "**optischen Weglänge**" besprechen:

Als optische Weglänge bezeichnet man das Produkt aus der geometrischen Strecke 'L' die ein Lichtstrahl zwischen zwei Punkten zurücklegen muss und dem Brechungsindex des Mediums n_{medium} in dem der Lichtstrahl verläuft:

$$L * n_{\text{medium}}$$

Ein Beispiel: Wenn ein Lichtstrahl im Vakuum eine Strecke von 10 cm zurücklegt, dann beträgt die optische Weglänge

$$3.15 \quad L_{\text{opt-vac}} = L * n_{\text{vac}} = 10 * 1 = 10,$$

denn der Brechungsindex im Vakuum beträgt $n_{\text{vac}} = 1$.

Im Wasser entspricht die geometrische Strecke von 10cm einer optischen Weglänge von:

$$3.16 \quad L_{\text{opt-Wasser}} = L * n_{\text{Wasser}} = 10 * 1,33 = 13,3 \text{ cm!}$$

So und weil es so schön war, jetzt noch eine Zugabe:
Zum Thema **Brechung** passt nämlich auch sehr gut das Thema **Totalreflexion**.

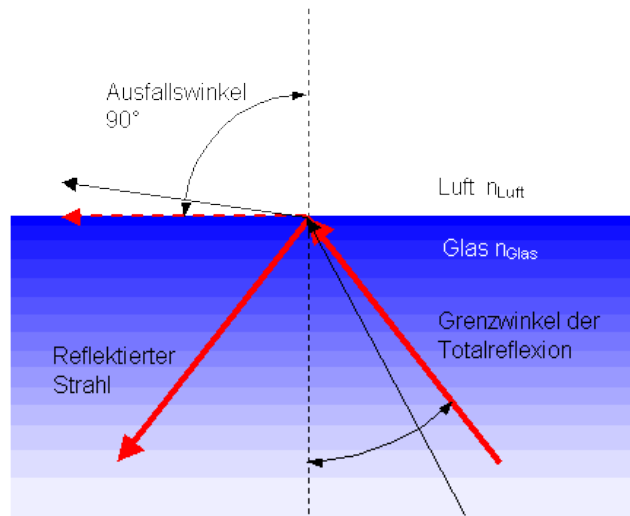


Bild 3.4: Prinzipskizze zur Totalreflexion.

Stellen Sie sich bitte vor, der Strahl im Bild 3.4 oben verläuft vom Glas in die Luft. (Von unten nach oben)

Wenn nun der Einfallswinkel (auf der Glasseite!) immer weiter vergrößert wird, dann tritt schließlich die Situation ein, dass der Ausfallswinkel größer als 90° werden müsste. (rot gestrichelt) Das ist genau der Punkt an dem der Lichtstrahl nicht mehr in die Luft austritt, sondern vollständig in das dichtere Medium (Glas) zurück reflektiert wird.

Der Grenzwinkel der "Totalreflexion" ist erreicht.

Mit Hilfe des oben hergeleiteten Brechungsgesetzes lässt sich dieser Grenzwinkel im optisch "dichteren" Medium sehr leicht berechnen: Wenn der Ausfallswinkel 90° beträgt, dann nimmt der Sinus des Ausfallswinkels den Wert '1' an. Das Brechungsgesetz ändert sich dann zu:

$$3.17 \quad \frac{1}{\sin \alpha_{\text{total}}} = \frac{n_{\text{Glas}}}{n_{\text{Luft}}}$$

Wenn man diesen Ausdruck nach α_{total} auflöst, dann ergibt sich:

$$3.18 \quad \alpha_{\text{total}} = \arcsin \frac{n_{\text{Luft}}}{n_{\text{Glas}}}$$

Nimmt man an, dass der Brechungsindex der Luft sehr nah bei '1' liegt, dann lässt sich die Angelegenheit weiter vereinfachen:

$$3.19 \quad \alpha_{\text{total}} = \arcsin \frac{1}{n_{\text{Glas}}}$$

d.h., bei einem Brechungsindex von 1,5 (BK7-Glas) ist der **Grenzwinkel der Totalreflexion**: $\alpha_{\text{total}} = 42^\circ$.

4. Fokussierung von Licht.

Bisher haben wir aus dem gesamten Strahlenbündel immer nur einen einzigen, auf eine unendlich dünne Linie zusammengezogenen, Lichtstrahl betrachtet. Wie wir gesehen haben, befolgt dieser Einzelstrahl das Reflexions- und das Brechungsgesetz.

Für die Praxis mindestens ebenso wichtig ist die Frage, wie es sich bewerkstelligen lässt, dass sämtliche von einem (Gegenstands-)Punkt ausgehenden Strahlen wieder in einem einzigen (Bild-)Punkt zusammenlaufen. Wenn es gelingt, ein 'Gerät' – eine **Linse** (!) - zu konstruieren, mit dessen Hilfe die divergent auseinanderlaufenden Strahlenbüschel der Lichtquelle, bzw. des 'Senders' an einer anderen Stelle wieder in einem Bild -, bzw. Empfängerpunkt vereinigt werden können, dann wäre das ein **Bild** der Lichtquelle, bzw. des leuchtenden Gegenstandes.

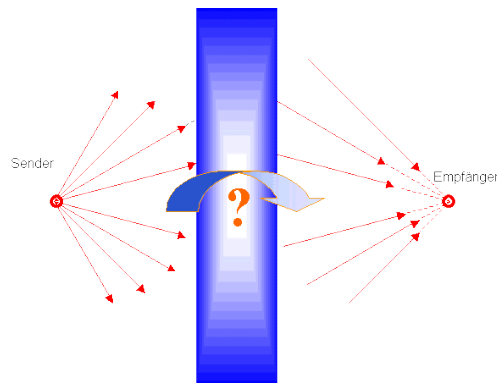


Bild 4.1: Prinzipbild zur Fokussierung eines Lichtbündels

Lassen Sie uns im obigen Bild zunächst das Strahlenbündel eines einzigen (Gegenstands-) Punktes betrachten:

Von der Quelle (Sender) laufen die Strahlen zunächst in alle Raumrichtungen. Auf den ersten Blick erscheint es vollkommen

Problem der Fokussierung:

Wie kann - unter Beachtung des Fermat'schen Prinzips (kürzest mögliche Zeit!) - das von der Lichtquelle (= Sender) ausgehende Strahlenbündel auf den Empfänger konzentriert werden?

Wenn man das Licht als Welle beschreibt, dann würde man sagen, dass die Konstruktion der „unterschiedlich langen Glasklötze“ – also der **Linse**! - dafür sorgt, dass die Wellenzüge am Ziel mit der gleichen Phasenlage eintreffen und sich dadurch zu einer konstruktiven Interferenz überlagern und verstärken. (Wir kommen im Kapitel 11 „Fata Morgana – die Grenzen des Fermat’schen Prinzips“ darauf zurück.)

Damit das Ganze im Sinne einer „konstruktiven Überlagerung“ funktioniert, muss es sich bei den Laufzeiten der Teilstrahlen noch nicht einmal um die „kürzeste“ Laufzeit handeln – „kürzeste Zeit“ in Vergleich zu was? - es reicht vollkommen, wenn die Laufzeiten gleich sind, um eine konstruktive Überlagerung zu ermöglichen.

Prinzipiskizze eines Fokussierenden Systems: Brechungsindex und die Abmessungen der in den Strahlengang eingefügten Prismen sind so abgestimmt, dass die Zeit für sämtliche Strahlverläufe gleich ist.

So, "theoretisch" ist jetzt klar wie man ein Lichtstrahlenbündel fokussieren kann. Jetzt müssen wir uns 'nur noch' um die praktische Realisierung kümmern. Im nächsten Abschnitt geht's los.

aussichtslos, sämtliche Lichtstrahlen so zu beeinflussen, dass sie sich wieder in einem (Bild-) Punkt treffen, denn sämtliche Strahlen müssen dazu den kürzest möglichen Weg zwischen dem Sender (= **Gegenstand**) und dem Empfänger (= **Bild**) benutzen!

Der (zeitlich) kürzeste Weg ist ganz sicher die direkte Verbindungslinie zwischen Quelle und Empfänger; - für allen anderen Strahlen sieht es schlecht aus.

Zur Lösung dieses Problems kann man sich die Tatsache zunutze machen, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes in den verschiedenen Medien unterschiedlich groß ist. Wir hatten bereits im Zusammenhang mit der Lichtbrechung (Kapitel 3) darüber gesprochen.

Im Glas ist das Licht 1,5-mal langsamer als in der Luft. Wenn man nun das Licht auf den verschiedenen Wegen durch unterschiedlich lange Glasklötze künstlich verlangsamt, dann kann man sicher erreichen, dass sämtliche Lichtstrahlen die gleiche - kürzeste - Zeit benötigen. Im folgenden Bild ist eine Anordnung dargestellt, die diesen Anforderungen genügen könnte.

Obwohl das fokussierende System hier noch aus mehreren Glasklötzchen besteht, ist Ihnen sicher schon klar, was wir hier gerade konstruieren: eine **Linse**.

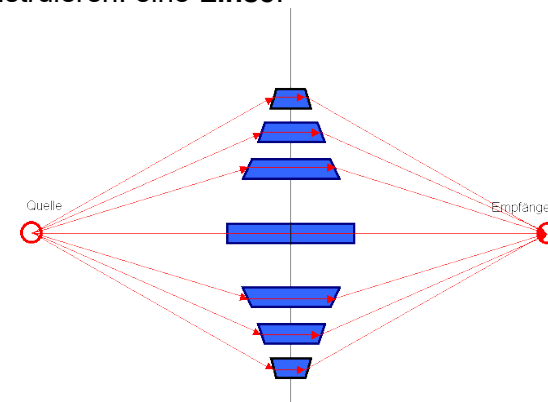


Bild 4.2: Prinzipbild zur Konstruktion eines fokussierenden Elementes.

5. Asphärische Linsen

Sie haben gerade im Kapitel 4 gelesen, dass es grundsätzlich möglich sein sollte, durch ein geeignet geformtes "optisches Bauelement" sämtliche Strahlen eines Lichtbündels auf einen Punkt, den "Bildpunkt" zu fokussieren. Nun wäre es natürlich ganz interessant zu wissen, wie die Geometrie eines Bauelementes beschaffen sein muss, damit das auch klappt.

Ziel der folgenden Überlegungen ist es, den Strahlverlauf von optischen Abbildungssystemen auf ein grundsätzliches Prinzip zurückzuführen – in diesem Falle das Fermat'sche Prinzip der kürzesten Zeit.

Machen wir es uns möglichst einfach und nehmen zunächst an, dass zwischen der Quelle und dem Empfänger eines Lichtstrahls nur eine Grenzfläche existiert.

Im folgenden Bild ist die Situation dargestellt:

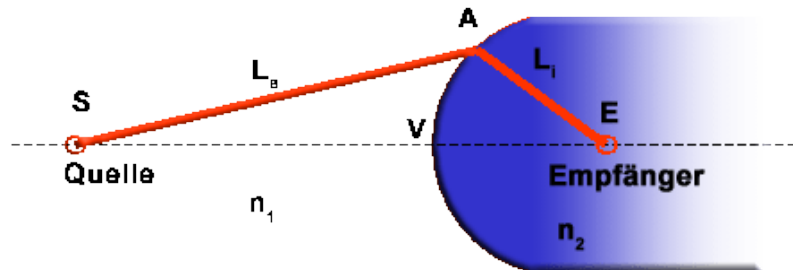


Bild 5.1: Prinzipbild zur Oberflächenform eines fokussierenden Elementes - Strahlverlauf durch eine asphärische Fläche.

So, - wie war das noch mit der **Fermat'schen Prinzip**?

Sie erinnern sich: Kapitel 4 „Fokussierung von Licht“ (Bild 4.2) – es geht um konstruktive Überlagerung möglichst vieler Lichtstrahlen.

Dieses Kapitel ist eigentlich nur für „Theoretiker“ interessant: Es geht um die Frage, ob es möglich ist, ein optisches Bauteil so zu formen, dass ein divergierendes Strahlenbündel fokussiert, oder parallelisiert werden kann.

Es geht also um den „Existenzbeweis“ einer Linse. Wenn Sie eher am praktischen Umgang mit diesen Komponenten interessiert sind, dann können Sie Kapitel 5. Und 6 überspringen und mit Kapitel 7 „Dünne Linsen“ weiter machen!

Der Lichtstrahl wird zwischen Quelle (S) und Empfänger (E) den zeitlich kürzesten Weg wählen. Wenn wir nun so etwas wie eine "Abbildung" der Licht-Quelle am Ort des Empfängers realisieren wollen, dann hilft es uns wenig, wenn dieser kürzeste Weg nur für einen der vielen Strahlen existiert, - z.B. für den im obigen Bild 5.1 eingezeichneten roten Lichtstrahl (L_a und L_i), - wobei man rein gefühlsmäßig sagen würde, dass es sich dabei um einen längeren Weg handelt.

Eine Abbildung mit möglichst großer Bildhelligkeit kann erst dann entstehen, wenn eine möglichst große Anzahl von Lichtstrahlen daran beteiligt ist. D.h. die Fermat'sche Bedingung darf nicht nur für einen - z.B. für den oben gezeigten - Pfad, erfüllt sein, sondern auch für alle möglichen anderen Pfade. (s.d. Bild 4.2)

D.h. die optische Weglänge, die sich aus dem Produkt der geometrischen Wegstrecke $L_a + L_i$ (im obigen Bild) multipliziert mit dem jeweiligen Brechungsindex (n_1 bzw. n_2) ergibt, muss deshalb für alle möglichen Verläufe gleich sein

$$5.1 \quad L_a \cdot n_1 + L_i \cdot n_2 = \text{const}$$

Das ist nun eine spannende Situation:

Wie muss denn die Grenzfläche zwischen den beiden Medien geformt sein, damit alle Strahlen exakt die gleiche optische Wegstrecke vor sich haben? Egal ob sie auf einem stark abgewinkelten, oder auf direktem (geradem) Pfad von der Quelle zum Empfänger laufen.

Eine Lösung dieses Problems könnte z.B. eine elliptisch geformte Grenzfläche sein:

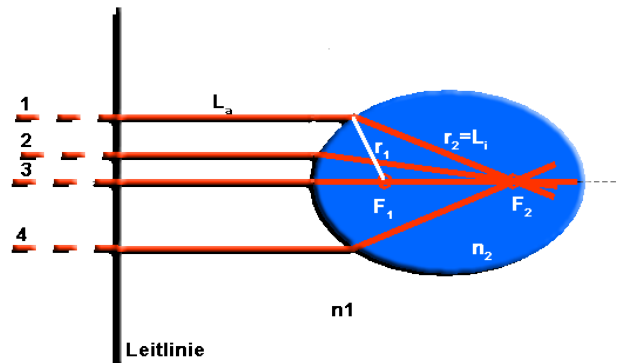


Bild 5.2: Brennpunkte (F_1 u. F_2) einer ellipsoidförmigen Fläche ($n_1 < n_2$).

Wir werden diese Vermutung 'mal als richtig unterstellen und nachweisen, dass ein Ellipsoid die Fermat'sche Bedingung tatsächlich erfüllt, oder anders ausgedrückt:

Sämtliche Strahlverläufe zwischen Lichtquelle und Empfänger sind gleich lang, egal an welchem Punkt der Lichtstrahl die Grenzfläche zwischen den beiden Medien passiert. Es müsste also, wie oben bereits bemerkt, gelten:

$$5.1 \quad L_a \cdot n_1 + L_i \cdot n_2 = \text{const}$$

Bitte betrachten Sie im obigen Bild 5.2 die Strahlen 1 und 3.

Auf seinem Weg von der ("unendlich weit" entfernten) Quelle zur Grenzfläche muss Strahl 1 eine längere Wegstrecke zurücklegen als Strahl 3. Da unendliche Entfernungen immer etwas unhandlich sind, wollen wir als Bezugslinie für den Abstand L_a zur Grenzfläche die sog. "Leitlinie" des Ellipsoids verwenden. Die uns interessierenden Laufwegveränderungen zwischen den verschiedenen Strahlen treten ja nur in diesem letzten Teilstück auf.

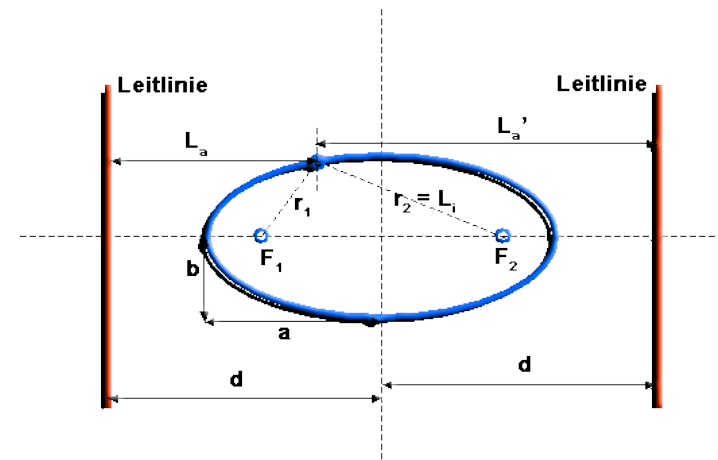


Bild 5.3: Kenngrößen der Ellipse.

Der Hauptgrund aber, warum wir die Leitlinie hier einführen, ist die Tatsache, dass es einige sehr einfache Zusammenhänge zwischen den Parametern der Ellipse (z.B. die beiden Radien r_1 und r_2) und dem Abstand L_a zur Leitlinie gibt. Kennen Sie noch die Definitionen aus der analytischen Geometrie für die Ellipse? Hier zur Erinnerung - und soweit wir sie hier benötigen - einige der Formeln und Begriffe:

a: große Achse

b: kleine Achse

daraus abgeleitet: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

num. Exzentrizität: $e = c/a < 1$

Leitlinieneigenschaft: $r_1/L_a = r_2/L_{a'} = e$

Brennpunkteigenschaft: $r_1 + r_2 = \text{const}$

Definition 1: Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte, für die die Summe der Abstände von zwei gegebenen festen Punkten (Brennpunkten) konstant ist →

$$5.2 \quad r_1 + r_2 = \text{const}$$

Definition 2: Leitlinien sind Geraden, die zur kleinen Achse b parallel sind und von dieser den Abstand

$$5.3 \quad d = a / e$$

haben, wobei e die numerische Exzentrizität ist. (s.o.)

Zusammenhang zwischen numerischer Exzentrizität e , den Abständen $r_{1/2}$ und L_a , L_a' :

$$5.4 \quad e = r_1 / L_a = r_2 / L_a'$$

Bei einer Ellipse gilt immer $\rightarrow e < 1$

Soweit die geometrischen Eigenschaften einer Ellipse, - dieses Wissen wollen wir jetzt einsetzen. Ausgangspunkt ist die Brennpunkteigenschaft (Definition 1 s.o.):

$$5.2 \quad r_1 + r_2 = \text{const}$$

Aus der Skizze im Bild 5.3 können wir ablesen:

$$5.5 \quad r_2 = L_i$$

der Ausdruck 5.3 für die numerische Exzentrizität $e = r_1 / L_a = r_2 / L_a'$ (s.o.) lässt sich umformen:

$$5.6 \quad r_1 = e \cdot L_a$$

Ersetzt man in der Beziehung 5.2. $r_1 + r_2 = \text{const}$ r_1 und r_2 durch die zuletzt beschriebenen Entsprechungen, dann erhält man:

$$5.5 \quad L_i + e \cdot L_a = \text{const}$$

und nach einer Multiplikation mit n_2 ergibt sich daraus:

$$5.6 \quad n_2 \cdot L_i + n_2 \cdot e \cdot L_a = n_2 \cdot \text{const} = \text{const}$$

Diese Beziehung ist identisch mit der Fermat'schen Bedingung

$$5.7 \quad L_a \cdot n_1 + L_i \cdot n_2 = \text{const}$$

wenn man für die Exzentrizität

$$5.8 \quad e = n_1/n_2 \text{ einsetzt.}$$

Da bei dem hier diskutierten Fall der Brechungsindex n_1 kleiner als n_2 sein soll, ist $e < 1$, woraus folgt, dass die Form der Grenzfläche tatsächlich eine Ellipse ist.

Wir sollten die gleiche Überlegung noch einmal anstellen, diesmal aber für den Fall, dass ein **divergierendes Strahlenbündel** durch eine geeignet geformte Grenzfläche in ein parallel verlaufendes Strahlenbündel verwandelt wird. Um das Ergebnis gleich vorweg zu nehmen - die Form der Grenzfläche, die dies leistet, ist ein **Hyperboloid** - und um die Sache zu vereinfachen, soll nur gezeigt werden, dass auch hier die Fermat'sche Bedingung ("...die Zeit für alle Strahlverläufe muss gleich sein...") erfüllt ist.

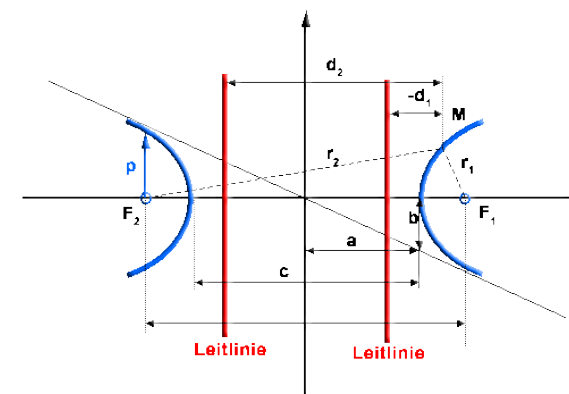


Bild 5.4: Kenngrößen der Hyperbel.

Aber bevor wir das tun, muss ich Sie auch hier an einige Zusammenhänge aus der analytischen Geometrie für die Hyperbel erinnern:

Hyperbelgleichung: $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$

Brennpunkteigenschaft: $r_2 - r_1 = 2a = \text{const}$

Numerische Exzentrizität: $e = c/a > 1$

Leitlinieneigenschaft: $r_1/d_1 = r_2/d_2 = e$

So, und nun der Strahlverlauf: Wie gesagt, diesmal möchten wir erreichen, dass ein divergentes Strahlenbündel nach dem Eintritt in das Medium mit dem Brechungsindex n_2 als paralleles Strahlenbündel weiterläuft und unsere Vermutung geht dahin, dass dies von einer hyperbolisch geformten Grenzfläche geleistet wird.

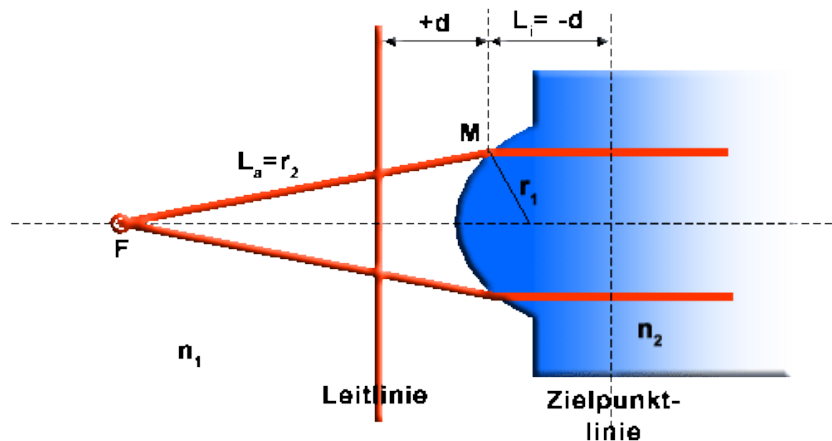


Bild 5.5: Strahlverlauf durch eine hyperboloidförmige brechende Fläche. (Der Abstand der Leitlinie von dem Punkt M auf der Oberfläche ist $+d$. $L_i = -d$ ist der Abstand der Zielpunkte innerhalb des Hyperboloids.)

Für die Brennpunkteigenschaft der Hyperbel gilt:

5.9

$$r_2 - r_1 = \text{const}$$

Die **Umkehrbarkeit** bzw. die **Reziprozität** bei der Ausbreitung von Lichtstrahlen steckt ja bereits im Fermat'schen Prinzip, - denn danach wird lediglich gefordert, dass der Weg auf die kürzest mögliche Art zurückgelegt wird (die richtigere Formulierung dieses Prinzips finden Sie im Kapitel 11), - in welche Richtung der Lichtstrahl verläuft ist dabei vollkommen 'wumpe'.

Aber wie so oft in der Physik (und im Leben!): Immer, wenn man behauptet, dass irgend etwas sich 'grundsätzlich' so und nicht anders verhält, dann wird man sehr schnell mit den Ausnahmen von der Regel konfrontiert: So ist es auch bei der Umkehrbarkeit (Reziprozität) des Lichtweges; von Helmholtz stammt die Erkenntnis, dass diese Umkehrbarkeit des Lichtweges z.B. nicht mehr gilt, wenn ein Magnetfeld ins Spiel kommt: aber lassen wir das, das führt zu weit!

Im letzten Bild ist $r_2 = L_a$ der Abstand zwischen dem Startpunkt F und dem Auftreffpunkt M auf der Oberfläche. Für r_1 lässt sich die Leitlinieneigenschaft der Hyperbel benutzen $r_1 = e \cdot d$. Wenn man berücksichtigt, dass sich die Zielpunktlinie im Abstand $L_i = -d$ vom Auftreffpunkt befindet, dann lässt sich die obige Brennpunkteigenschaft der Hyperbel so umformulieren:

$$5.10 \quad L_a + e \cdot L_i = \text{const}$$

Um aus dieser rein geometrischen Beziehung einen Ausdruck für die optischen Strecken zu formen, wird diese Gleichung nun noch auf beiden Seiten mit dem Brechungsindex n_1 multipliziert:

$$5.11 \quad n_1 \cdot L_a + e \cdot n_1 \cdot L_i = n_1 \cdot \text{const} = \text{const}$$

Für $e = n_2/n_1 > 1$ entspricht dies exakt der Fermat'schen Bedingung. Die Tatsache, dass die numerische Exzentrizität e größer als '1' ist macht deutlich, dass es sich in diesem Fall um ein Hyperboloid handelt.

Sehr wichtig für die Realisierung von konkreten Linsen ist die Tatsache, dass Strahlverläufe in der Optik grundsätzlich umkehrbar sind. D.h. der Strahl kann z.B. im Innern eines Ellipsoids aus Glas starten und dann außerhalb parallel zur optischen Achse weiterlaufen. In den Bildern sind deshalb absichtlich auch keine Pfeile eingezeichnet, die die Ausbreitungsrichtung andeuten.

Langer Rede, kurzer Sinn: Wir haben gezeigt, dass es möglich ist, unter Beachtung des Fermat'schen Prinzips, die Grenzfläche zwischen zwei optischen Medien so zu formen, dass ein divergierendes Strahlenbündel parallel ausgerichtet (Hyperboloid) und ein paralleles Strahlenbündel auf einen Punkt (Ellipsoid) fokussiert werden kann.

Mit dieser Kenntnis ist es nun möglich 'Linsen' zu konstruieren, bei denen der Gegenstandspunkt und der Bildpunkt in demselben Medium (i.a. Luft) liegen.

Wir wollen 'mal zwei Beispiele näher betrachten, z.B. eine (hyperbolische) Bikonvexlinse

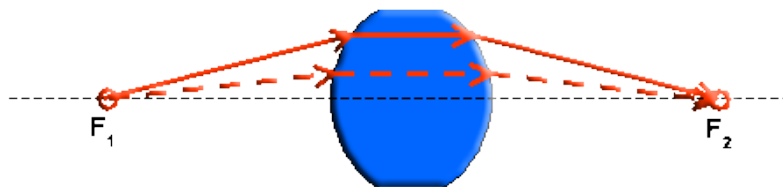


Bild 5.6: Hyperbolische Bikonvexlinse

Im obigen Bild ist eine **Bikonvexlinse** dargestellt, die zwei hyperbolischen Grenzflächen hat. Ein vom Brennpunkt F_1 divergent austretendes Strahlenbündel trifft auf die hyperbolische Grenzfläche und wird - so wie bereits im Bild "Strahlverlauf durch eine hyperboloidförmige brechende Fläche" (Bild 5.5) dargestellt - innerhalb des Glaskörpers parallel zur optischen Achse weiterlaufen. Als nächstes trifft das Strahlenbündel auf die zweite Hyperboloidfläche und wird, in Umkehrung desselben Strahlenganges, auf den Brennpunkt F_2 fokussiert.

Im nächsten Bild ist eine Linse dargestellt, die aus einer sphärischen / kugelförmigen Fläche und einem Ellipsoid besteht. Diese Flächenkombination macht aus einem divergierenden Strahlenbündel ein paralleles, - **aber nur unter der Bedingung, dass der Ausgangspunkt des Strahlenbündels im Mittelpunkt der Kugelfläche liegt**. Wenn das der Fall ist, dann trifft jeder Teilstrahl senkrecht auf die erste sphärische Fläche und verläuft von dort geradlinig weiter bis zur zweiten, elliptisch geformten

Achtung merken !:

Konvexe Linse: in der Mitte dicker als am Rand ('convexus' = gewölbt)

Konkave Linse: in der Mitte dünner als am Rand ('concavus' = hohl)

Oberfläche. (Bild 5.7) Hier passiert nun genau das, was im Bild 5.5 "Brennpunkt einer ellipsoidförmigen brechenden Fläche" dargestellt ist - die in einem optisch dichteren Medium (z.B. Glas) divergierend verlaufenden Strahlen werden nach dem Passieren einer ellipsoidförmigen Grenzfläche parallel ausgerichtet.

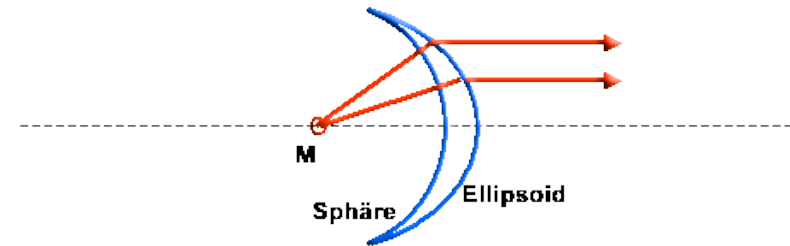


Bild 5.7: Sphäroelliptische Konvexlinse

Durch Kombination von Ellipsoiden und Hyperboloiden kann also jede beliebige Linse hergestellt werden. Dabei ergibt sich allerdings eine Schwierigkeit: asphärischen Oberflächen sind sehr schwierig herzustellen. Aus gepresstem Glas oder Kunststoff findet man sie häufig als Kondensorlinsen in Projektionsapparaten. Sie lassen sich auch mit computergesteuerten Poliermaschinen herstellen, aber als Präzisionsbauteil sind sie immer noch sehr aufwendig und teuer.

6. Brechung an einer Kugelfläche

Ich muss Sie warnen: dieses Kapitel ist ziemlich trocken und langweilig! (Da kann auch der lustige Schneemann links nichts mehr retten.)

Der Strahlverlauf zwischen zwei Medien (z.B. Luft und Wasser), die durch eine kugelförmige Grenzfläche voneinander getrennt sind, ist eigentlich nur für den Schneemann in der Glaskugel interessant. Ein weiteres 'wichtiges' und oft zitiertes Beispiel ist der Fisch in einem kugelförmigen Aquarium! Sie haben sich doch bestimmt schon häufig mit der Frage herumgequält, wie dieser Fisch seine Umwelt wahrnimmt?

Na sehen Sie, - es wird Zeit diese Frage zu beantworten.

Bevor wir anfangen, habe ich doch noch eine etwas seriösere Begründung, warum wir uns mit dem Strahlverlauf durch eine Kugelfläche befassen sollten.

Obwohl die ideale Grenzfläche für die Fokussierung eines Strahlenbündels eine Asphäre (Ellipse oder Hyperboloid) ist, - wir haben das im Kapitel 5 ausführlich diskutiert - werden in der Praxis häufig **kugelförmige Linsen** benutzt. Kugeloberflächen sind nämlich sehr viel einfacher und damit billiger herzustellen als asphärische Flächen. Es macht deshalb vielleicht doch etwas Sinn, wenn wir uns mit der Kugelfläche und ihren Eigenschaften als optischem Element beschäftigen

Fangen wir an! Es ist wirklich ganz einfach - alles was wir benötigen ist die folgende Dreiecksgeometrie:



Bild 6.1: Wie sieht der Fisch im kugelförmigen Aquarium seine Umwelt?

Für die Beschreibung der Brechung eines Lichtstrahls an einer Kugeloberfläche halte ich mich im Folgenden an die Darstellung von Richard P. Feynman "Vorlesungen über Physik", Bd.1

'paraxial' Strahlen, - das sind die Strahlen, die in der Nähe der optischen Achse verlaufen! Danach wäre der mit 's' gekennzeichnete Strahl im obigen Bild **kein** paraxialer Strahl.

In der Form $a^2 + b^2 = c^2$ haben Sie den Herrn Pythagoras in der Schule kennengelernt, - Sie erinnern sich bestimmt!

es gilt: $s^2 - d^2 = (s+d) \cdot (s-d)$

Näherung für Paraxialstrahlen: wenn $s \sim d$ ist, dann gilt $(s + d) \sim 2s$

's' bzw. 'd' werden in der Literatur auch als "**Schnittweite**" bezeichnet. Da bei achsennahen Strahlen 's' und 'd' ohnehin annähernd gleich sind, ist die Bezeichnung nicht ganz einheitlich

Im Fall der Kugelfläche kann es hierbei allerdings nur um die Frage gehen, wie gut (bzw. wie schlecht) die Annäherung an den Idealfall der Asphäre gelingt. (Kapitel 5)

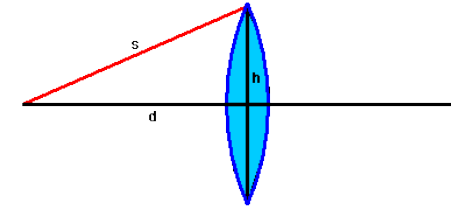


Bild 6.2 Kenngrößen für die Geometrie einer Linse mit kugelförmigen Grenzflächen.

Um die Abbildungsfehler einer sphärischen Fläche möglichst klein zu halten, soll im Folgenden nur von den sog. **paraxialen Strahlen** die Rede sein.

Die gesamte Geometrie und die mit den paraxialen Strahlen verbundene Näherung ist im obigen Bild dargestellt. Mehr ist tatsächlich nicht notwendig!

Es geht nämlich nur um die Frage, um wieviel länger ist der 'schräg' verlaufende Strahl 's' gegenüber dem direkten 'd'. Das lässt sich leicht ermitteln. s, d und h bilden ein rechtwinkliges Dreieck. Auf ein solches Dreieck können wir den Satz des Pythagoras anwenden:

$$6.1 \quad s^2 = d^2 + h^2$$

Oder etwas umgestellt:

$$6.2 \quad s^2 - d^2 = h^2$$

bzw.:

$$6.3 \quad (s-d) \cdot (s+d) = h^2$$

oder:

$$6.4 \quad (s-d) = h^2 / (s+d)$$

Mit der Näherung für achsennahe Strahlen $(s + d) \sim 2s$ lässt sich die Wegdifferenz $w_{\text{diff}} = (s - d)$ zwischen dem schräg verlaufenden und dem direkten Strahl so schreiben

$$6.5 \quad w_{\text{diff}} = (s - d) = h^2 / (s + d)$$

$$6.6 \quad w_{\text{diff}} \sim h^2 / 2s$$

Nach dem Fermat'schen Prinzip müssen nun sämtliche Strahlverläufe zwischen Quelle und Empfänger (zeitlich) gleich lang sein. Wie kann das gelingen?

Sie kennen das Konzept bereits:

ein die Laufzeit verzögerndes Medium muss so zwischen Quelle und Empfänger angeordnet werden, dass der direkte Weg (schwarz) genauso lang ist wie der abgelenkte (rot).

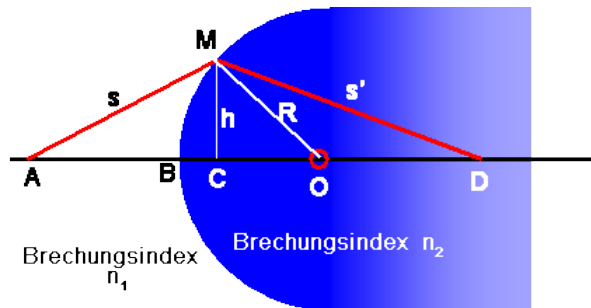


Bild 6.3: Brechung an einer kugelförmigen Grenzfläche. (Kenngrößen)

Der Strahlverlauf durch eine kugelförmige Grenzfläche ist im obigen Bild dargestellt. In der Näherung, die wir hier betrachten, interessieren uns nur die beiden Dreiecke AMC und CMD. Die optische Weglänge des direkt von A nach D verlaufenden Strahls beträgt:

$$6.7 \quad n_1 \cdot \underline{AC} + n_2 \cdot \underline{CD})$$

Die optische Weglänge des abgelenkten Strahles beträgt:

$$6.8 \quad (n_1 \cdot \underline{AM} + n_2 \cdot \underline{MD})$$

Wir hatten bereits abgeschätzt (Gleichung 6.6), dass die Strecke AM um

$$6.9 \quad h^2 / 2s$$

länger ist als die Strecke AC. Nach derselben Überlegung ist MD um

$$6.10 \quad h^2 / 2s'$$

länger als CD.

Daraus folgt, dass die optische Weglänge des abgelenkten Strahlengangs (rot) insgesamt um:

$$6.11 \quad w_{\text{ges}} = n_1 \cdot (h^2 / 2s) + n_2 \cdot (h^2 / 2s')$$

länger ist, als der auf dem direkten Weg verlaufende Strahl.

Um dem Fermat'schen Prinzip zu genügen, muss die optische Weglänge zwischen dem abgelenkten und dem direkten Strahl aber gleich groß sein!

Ein etwas genauerer Blick auf die Skizze im obigen Bild zeigt, wie das gelingen kann - bei der Herleitung der Weglängendifferenz w_{ges} haben wir nämlich eine Kleinigkeit übersehen: Auf dem Weg von A nach C läuft der 'direkte Strahl' zwischen B und C bereits durch das Medium mit dem dichteren

Brechungsindex n_2 . Auf diesem Teilstück hatten wir fälschlicherweise mit einem Brechungsindex n_1 und einer optischen Weglänge von $n_1 \cdot \underline{BC}$ gerechnet. Tatsächlich beträgt sie aber $n_2 \cdot \underline{BC}$, ist also um

$$6.12 \quad (n_2 - n_1) \cdot \underline{BC}$$

größer als $n_1 \cdot \underline{BC}$.

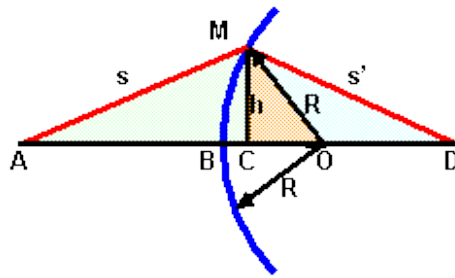


Bild 6.4: Beziehung für die **Schnittweiten s und s'** bei einer kugelförmigen Grenzfläche.

So, jetzt müssen wir nur noch herausfinden wie groß die Wegstrecke $\underline{BC}$ ist. Schauen Sie sich dazu die kleine Skizze oben an:

R ist der Radius der Kugeloberfläche, - das wussten Sie schon! R , $\underline{CO}$ und h bilden ein rechtwinkliges Dreieck und genau wie oben, wenden wir den Satz des Pythagoras an:

$$6.13 \quad R^2 = \underline{CO}^2 + h^2$$

oder :

$$6.14 \quad R^2 - \underline{CO}^2 = h^2$$

und wenn Sie sich an Ihre Algebra-Stunden in der Schule erinnern, dann können Sie stattdessen schreiben:

Bitte beachten Sie: in dieser Überlegung stecken mehrere Vernachlässigungen:
Für achsennahe (paraxiale) Strahlen kann man abschätzen, dass $\underline{CO}$ in etwa so groß ist wie R, d.h. $(R + \underline{CO}) \approx 2R$; das bedeutet aber auch, dass $(R - \underline{CO}) \approx 0$ ist!

$$6.14 \quad (R - \underline{CO}) \cdot (R + \underline{CO}) = h^2$$

$(R - \underline{CO})$ ist identisch mit der gesuchten Strecke $\underline{BC}$ und da $\underline{CO}$ ungefähr so gross wie R ist - zumindest für achsennahe (paraxiale) Strahlverläufe - können Sie $(R + \underline{CO})$ durch $2R$ ersetzen, also:

$$6.15 \quad \underline{BC} \cdot 2R \approx h^2,$$

bzw.:

$$6.16 \quad \underline{BC} \approx h^2 / 2R$$

Damit die beiden Wegstrecken AMD (rot) und ACD (schwarz) tatsächlich gleich groß sind, muss die Bedingung

$$6.17 \quad w_{\text{ges}} = (n_2 - n_1) \cdot \underline{BC}$$

bzw.:

$$6.18 \quad n_1 \cdot (h^2 / 2s) + n_2 \cdot (h^2 / 2s') = (n_2 - n_1) \cdot (h^2 / 2R)$$

erfüllt sein, was sich natürlich sofort zu

$$6.19 \quad (n_1 / s) + (n_2 / s') = (n_2 - n_1) / R$$

vereinfachen lässt.

Damit haben wir das 'Klassenziel' erreicht und können einige Spezialfälle diskutieren. Zu diesem Zweck soll die letzte Gleichung noch weiter vereinfacht werden: Den Brechungsindex n_1 setzen wir gleich '1' (für Vakuum bzw. Luft) und für n_2 schreiben wir einfach n . Dann ergibt sich

$$6.20 \quad (1 / s) + (n / s') = (n - 1) / R$$

Je weiter der (Quell-)Punkt von der Kugelfläche wegrückt (d.h. je größer die Strecke s wird), um so dichter rückt der (Bild)Punkt an die Kugelfläche heran, bzw. s' wird kleiner.

Interessant ist der Fall, wenn der Gegenstandspunkt sehr weit entfernt liegt - wir 'Optiker' reden dann von einem 'unendlich' weit entfernten Quellpunkt - was in der obigen Gleichung durch einen 'unendlich' großen Wert für s beschrieben wird.

In diesem Fall ist $(1/s) = 0$

Den Abstand des Bildpunktes s' , der sich für diesen Grenzfall ergibt, nennt man die **Brennweite f'** .

Für die **Brennweite einer Kugelfläche** kann man also schreiben:

$$6.21 \quad f' = n \cdot R / (n-1)$$

Da sich der Strahlengang auch umkehren lässt, hat die Kugelfläche natürlich auch auf der anderen Seite eine Brennweite f . ($s' = \text{unendlich}$ und $s = f$) :

$$6.22 \quad f = R / (n-1)$$

Mit dieser Schreibweise für die Brennweite f kann man die obige Beziehung für die Schnittweiten s und s' in eine etwas bequemere Form bringen:

$$6.23 \quad 1 / s + n / s' = 1 / f$$

Wir sollten diese Beziehung noch etwas näher betrachten. Was passiert z.B., wenn die Gegenstandsweite s kleiner als die Brennweite f ist, also z.B. $s = f/2$? Dann ergibt sich für s'

$$6.24 \quad s' = - n \cdot f$$

d.h., die Bildweite s' wird negativ! Was soll das denn bedeuten

Brennweite einer Kugelfläche: (Brennpunkt in der Kugel)

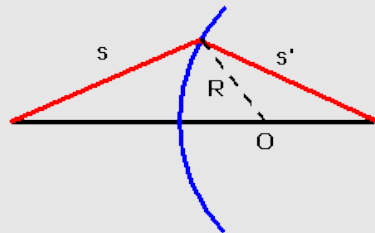
Brennweite einer Kugelfläche: (Brennpunkt außerhalb der Kugel)

Negative Bildweite !

... und hier die KI-generierte Antwort auf die Frage vom Anfang dieses Kapitels:
wie sieht ein Fisch seine Umwelt aus einem kugelförmigen Aquarium:



Ich habe Zweifel, ob wir der KI hier trauen können?



Der Gegenstandspunkt O befindet sich zwischen dem Brennpunkt F und der Oberfläche. Die Strahlen des Gegenstandspunktes treffen auf die Kugeloberfläche, werden dort gebrochen, aber sie verlaufen weiterhin divergent. Für den Betrachter auf der rechten Seite (also für den Fisch im Kugelaquarium!) scheinen die Lichtstrahlen aus dem virtuellen Bildpunkt O' zu kommen. Die negative Bildweite s' bezieht sich also auf ein scheinbares - virtuelles - Bild.

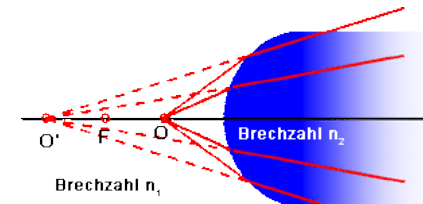


Bild 6.5: Abbildung mit negativer Bildweite (virtuelles Bild)

Dies ist vielleicht die richtige Stelle, um einige Vereinbarungen über die Vorzeichen der Strecken zu treffen, die bei Linsen(-systemen) häufig auftreten; in der folgenden Tabelle sind sie aufgelistet:

Strecke	Abkürzg.	Vorz.	Erläuterung
Gegenstandsweite	s	+	Wenn der Gegenstand links von der brechenden Fläche liegt
Gegenstandsweite	s	-	Wenn der Gegenstand rechts von der Oberfläche liegt
Bildweite	s'	+	Wenn der Bildpunkt rechts von der Oberfläche liegt.
Bildweite	s'	-	Wenn der Bildpunkt links von der Oberfläche liegt.
Krümmungsradius	R	+ (-)	Wenn der Mittelpunkt rechts (links) von der Oberfläche liegt.

7. Dünne Linsen

Gut, - nun wissen wir, wie sich das Licht benimmt, wenn es auf eine Kugelfläche trifft; - aber besonders nützlich ist dieses Wissen nicht! Ganz selten nämlich befindet sich der Gegenstandspunkt in einem anderen Medium als der Bildpunkt. Eine funktionsfähige Linse besteht natürlich aus zwei Grenzflächen, und für jede dieser Flächen können wir den oben entwickelten Formalismus anwenden.

Es gibt es eine Vielzahl von Linsenformen mit den unterschiedlichsten Oberflächenkrümmungen. Für jede dieser Linsen und Linsenkombinationen könnte man eine spezielle Formel aufstellen, die man dann zur Hand hätte, wenn man von seinem Chef die Aufgabe erhält, den Strahlverlauf durch einen "Sieben-Linser" zu berechnen; - aber sehr sinnvoll erscheint mir das nicht. Überlassen wir solche Zauberkunststücke lieber den Spezialisten und kümmern uns um einige grundsätzlichere Fragestellungen, - z.B., wie man die Wirkung einer einzelnen sphärischen Linse beschreiben kann. Zur weiteren Vereinfachung der Verhältnisse soll hier auch nur von den sog. "dünnen Linsen" die Rede sein. **"Dünne Linsen"** sind solche, bei denen kleinere Laufwegsfehler im Glaskörper vernachlässigt werden können.

Oder anders ausgedrückt: Wir vergessen, dass die Linse eine bestimmte Dicke hat und ersetzen sie durch eine "Ebene", die senkrecht auf der optischen Achse steht.

Wir fangen zur Herleitung der Gleichung für dünne Linsen noch einmal ganz von vorn an - die Grundidee ist aber immer gleich: die optischen Wege zwischen Gegenstandspunkt A und Bildpunkt D müssen für alle Strahlen gleich sein! Im folgenden Bild sind zwei Extremfälle für den Strahlverlauf eingezeichnet: Der direkte (optische) Weg ABCD muss nach dem Fermat'schen Prinzip

Ok, nach zwei den „theoretischen“ Kapiteln 5. und 6. soll jetzt die praktische Anwendung wieder im Mittelpunkt stehen!

Bedeutung einiger Symbole:

s und s' – Schnittweiten;
 R₁ und R₂ – Krümmungsradien der beiden Linsenoberflächen;
 n₁ – Brechungsindex vor und hinter der Linse;
 n₂ – Brechungsindex des Linsenmaterials (z.B. Glas);

Dieser Zusammenhang wurde im Kapitel 6, ("Brechung an einer Kugelfläche") Gleichung 6.11 erläutert

Sie erinnern sich? Das hatten wir uns auch schon im Kapitel 6 Gleichung 6.17 überlegt.

genauso lang sein wie der (optische) Weg über die äußerste Linsenke M, also :

$$7.1 \quad n_1 \cdot \underline{AB} + n_2 \cdot \underline{BC} + n_1 \cdot \underline{CD} = n_1 \cdot \underline{AM} + n_1 \cdot \underline{MD}$$

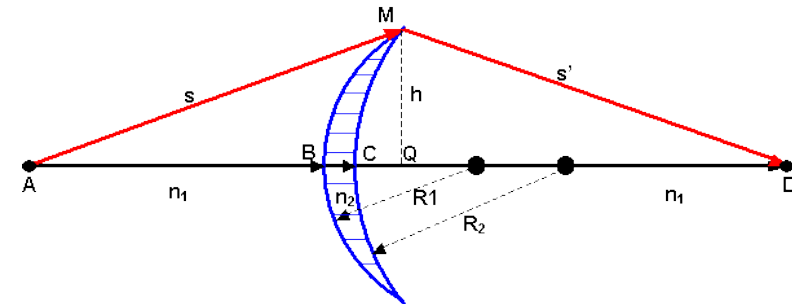


Bild 7.1: Kenndaten einer „dünnen“ Linse.

Die schräg verlaufenden Strahlen AM und MD sind um die Strecke

$$7.2 \quad (n_1 h^2 / 2s + n_1 h^2 / 2s')$$

(geometrisch) länger als die direkte Verbindung AD. Ausgeglichen wird dieser geometrische Unterschied durch die Tatsache, dass der direkte Strahl auf der Strecke BC durch Glas laufen muss und dadurch einen um den Anteil $(n_2 - n_1) \cdot \underline{BC}$ längeren (optischen) Weg zurückzulegen hat. Es muss also gelten:

$$7.3 \quad (n_1 h^2 / 2s + n_1 h^2 / 2s') = (n_2 - n_1) \cdot \underline{BC}$$

Die Länge der Strecke BC lässt sich - unter Beachtung der oben definierten Näherung für achsennahe Strahlen - auch durch die Krümmungsradien ausdrücken:

$$7.4 \quad \underline{BC} = h^2 / 2R_1 - h^2 / 2R_2$$

und daraus ergibt sich schließlich:

$$7.5 \quad n_1/s + n_1/s' = (n_2 - n_1)(1/R_1 - 1/R_2)$$

Wenn wir nun noch die Abkürzung $n = n_2/n_1$ einführen, dann erhalten wir die folgende Beziehung zwischen den Schnittweiten s und s' , sowie den Krümmungsradien der Linsenoberflächen R_1 und R_2 :

$$7.6 \quad 1/s + 1/s' = (n-1) \cdot (1/R_1 - 1/R_2)$$

Damit verfügen wir über ausreichendes Handwerkszeug, um den Strahlverlauf durch eine 'dünne Linse' zu beschreiben.

Lassen Sie uns zunächst mal die Brennweite f untersuchen. Zu diesem Zweck verschieben wir die Gegenstandsweite s ins Unendliche (d.h., der einfallende Strahl verläuft parallel zur optischen Achse) und bezeichnen die dazu gehörende Bildweite s' als Brennweite f . Also:

$$7.7 \quad 1/f = (n-1) \cdot (1/R_1 - 1/R_2)$$

Im Gegensatz zu einer einzelnen, sphärisch gekrümmten Fläche bleibt die Brennweite jetzt auch bei einer Umkehrung des Strahlengangs gleich groß. Mit diesem Wissen über die Brennweite einer 'dünnen' Linse können wir die obige Linsengleichung weiter vereinfachen:

$$7.8 \quad 1/s + 1/s' = 1/f$$

Diese Schreibweise ist für den praktischen Umgang mit Linsen auch sehr viel sinnvoller. Stellen Sie sich bitte vor, Sie hätten eine Linse mit unbekannten Eigenschaften vor sich auf dem Tisch liegen. Sie könnten nun natürlich die Krümmungsradien der Oberflächen messen und wären damit in der Lage, mit Hilfe der oben genannten Beziehungen

Diese Schreibweise für den Brechungsindex hatten wir auch im Kapitel 3 "Brechung" benutzt.

Als Brillenträger kennen Sie vielleicht den Begriff '**Dioptrie**' als Maß für die Brennweite bzw. 'Breckkraft' einer Linse. Die 'Breckkraft' einer Linse mit der Einheit 'Dioptrie' ist der Kehrwert der Brennweite, wobei die Brennweite in Metern ausgedrückt wird. Beispiel: eine Linse mit der Brennweite von 20 cm = 0,2m hat danach eine Brechkraft von $(1/0,2 =)$ 5 Dioptrien

Linsengleichung!

$$7.9 \quad 1/s + 1/s' = (n-1) \cdot (1/R_1 - 1/R_2)$$

die Bild- und Gegenstandsweite zu ermitteln.

Aber nun messen Sie mal den Krümmungsradius einer Sphäre! Die Angelegenheit ist keineswegs trivial. Da ist es schon sehr viel einfacher, die Brennweite der Linse zu bestimmen. Man hält das 'Ding' z.B. gegen die Sonne - diese Lichtquelle ist 'ziemlich weit' entfernt und das einfallende Strahlenbündel deshalb recht gut parallel - und dann misst man den Abstand zwischen der Linse und dem Fokus. Fertig!

Ein nicht ganz uninteressanter Sonderfall liegt vor, wenn sich der Gegenstandspunkt s in der Entfernung $2f$ von der Linse befindet, dann ist der Bildpunkt s' ebenfalls in einem Abstand von $2f$ zu finden und - wie sich später zeigen wird - das Verhältnis Gegenstandsgröße / Bildgröße ist 1:1

Wir sollten noch ein paar Gedanken an die Definition der Brennweite

$$7.10 \quad 1/f = (n-1) \cdot (1/R_1 - 1/R_2)$$

verschwenden, - speziell auf das Vorzeichen.

Im Fall einer einfachen Sammellinse (bikonvex) mit $R_1 > 0$ und $R_2 < 0$ ergibt sich auf jeden Fall ein positiver Wert, - aber was bedeutet es eigentlich, wenn die Brennweite negativ ist, z.B. für den Fall $R_1 < 0$ und $R_2 > 0$ (bikonkav?) Im folgenden Bild sind die beiden Fälle gegenübergestellt:

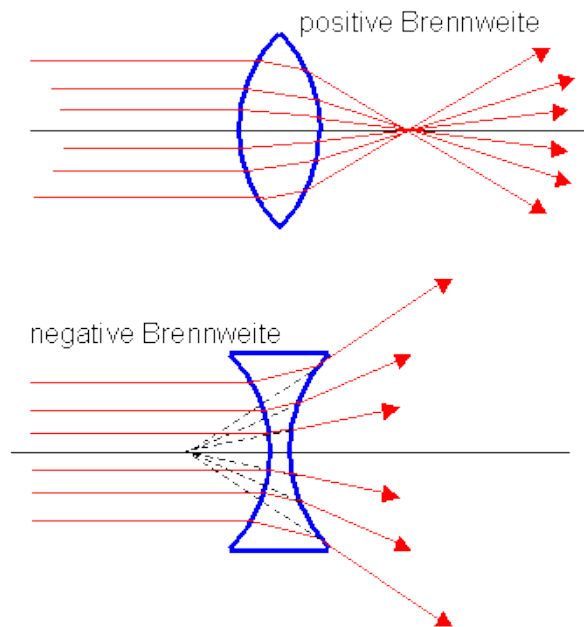


Bild 7.2: Konvexe und konkave Linse

Negative Brennweite bedeutet zunächst nur, dass ein parallel einfallendes Strahlenbündel in ein divergentes Bündel umgewandelt wird. Für einen Beobachter auf der rechten Seite der Linse entsteht jedoch der Eindruck, als ob das Strahlenbündel aus einer punktförmigen Lichtquelle jenseits der Linse (auf der linken Seite) stammt; man spricht hier von einem 'virtuellen' Bild, während im Fall der positiven Brennweite ein reelles Bild einer ('unendlich' weit entfernten) Lichtquelle entsteht.

Eine Übersicht über die verschiedenen Linsentypen finden Sie in der folgenden Liste:

Konvexe Linse: in der Mitte dicker als am Rand.

Konkave Linse: in der Mitte dünner als am Rand

Den Begriff 'unendlich' sollte man in der Optik nicht allzu wörtlich nehmen. Gemeint ist häufig ein paralleles Strahlenbündel, - so auch hier!

Abbildung durch eine dünne bikonvexe Linse:

1. Gegenstand befindet sich in einer Entfernung von mehr als der doppelten Brennweite --> das Bild ist verkleinert.
2. Gegenstand befindet sich in einer Entfernung von genau der doppelten Brennweite (Punkt '2f') --> das Bild ist gleich groß.
3. Gegenstand befindet sich zwischen der doppelten und der einfachen Brennweite --> das Bild ist vergrößert.
4. Gegenstand befindet sich zwischen der einfachen Brennweite und der Linse --> es entsteht ein "virtuelles" Bild auf der Gegenstandsseite.

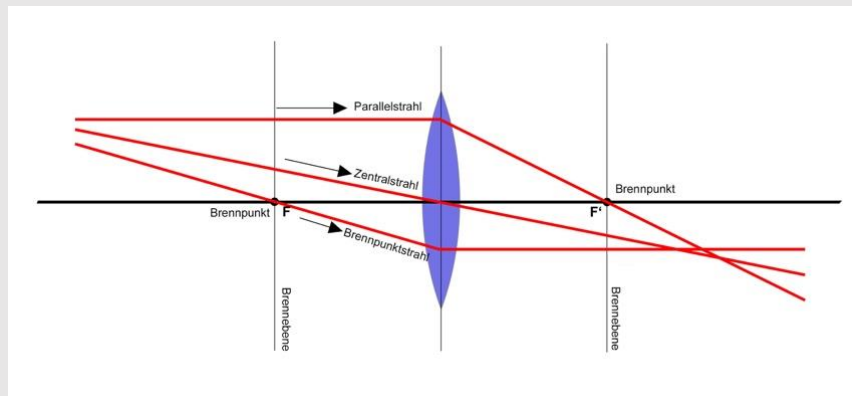


Bild 7.4 Strahlverläufe an dünnen Linsen – Parallel-, Zentral-, Brennpunktstrahl

Aus diesen beiden Regeln für den Strahlverlauf durch eine Linse lässt sich auch direkt die Linsengleichung herleiten - in vielen Lehrbüchern wird das vorgeführt, aber ich denke damit wird das Pferd vom Schwanz aufgezäumt!

Die zweite Regel ergibt sich direkt aus der ersten, wenn man die Umkehrbarkeit des Strahlenganges berücksichtigt.

bikonvex: $R_1 > 0$ $R_2 < 0$	
bikonkav: $R_1 < 0$ $R_2 > 0$	
plankonvex: $R_1 \text{ unendl.}$ $R_2 < 0$	
plankonkav: $R_1 \text{ unendl.}$ $R_2 > 0$	
meniskuskonvex: $R_1 > 0$ $R_2 > 0$	
meniskuskonkav: $R_1 > 0$ $R_2 > 0$	

Bild 7.3: Linsentypen

Aus den bisherigen Überlegungen lassen sich die folgenden Regeln für den Strahlverlauf durch eine Linse ableiten:

1. Regel: (Bild 7.4)

Jeder parallel zur optischen Achse einfallende Strahl verläuft auf der anderen Seite der Linse durch den Brennpunkt, - und sei es auch nur in seiner rückwärtigen Verlängerung.

2. Regel: (Bild 7.4)

Jeder Strahl, der die Linse durch den Brennpunkt erreicht, verlässt diese parallel zur optischen Achse.

Hier, noch einmal zur Erinnerung, die Definition der verwendeten Symbole und deren Vorzeichen:

Strecke	Abkürzg.	Vorzeichen	Erläuterung
Gegenstandsweite	s	+	Wenn der Gegenstand links von der brechenden Fläche liegt
Gegenstandsweite	s	-	Wenn der Gegenstand rechts von der Oberfläche liegt
Bildweite	s'	+	Wenn der Bildpunkt rechts von der Oberfläche liegt.
Bildweite	s'	-	Wenn der Bildpunkt links von der Oberfläche liegt.
Krümmungsradius	R	+	Wenn der Mittelpunkt rechts von der Oberfläche liegt.
Krümmungsradius	R	-	Wenn der Mittelpunkt links von der Oberfläche liegt.
Brennweite (Objektseite)	f	+	Links von der Linse
Brennweite (Bildseite)	f'	-	Rechts von der Linse
Objektstand vom Brennpunkt F	x	+	links vom objektseitigen Brennpunkt
Objektstand vom Brennpunkt F'	x'	+	rechts vom bildseitigen Brennpunkt
Objekthöhe	h	+	über der opt. Achse

8. Abbildungen

Bis hierher haben wir immer nur Bild- und Gegenstandspunkte auf der '**optischen Achse**' betrachtet. Das ist relativ uninteressant - welches Bild besteht nur aus einem Punkt? Wir müssen uns nun der Frage zuwenden, wie Gegenstandspunkte abgebildet werden, die außerhalb der optischen Achse liegen. Im folgenden Bild ist die Ausgangssituation skizziert.

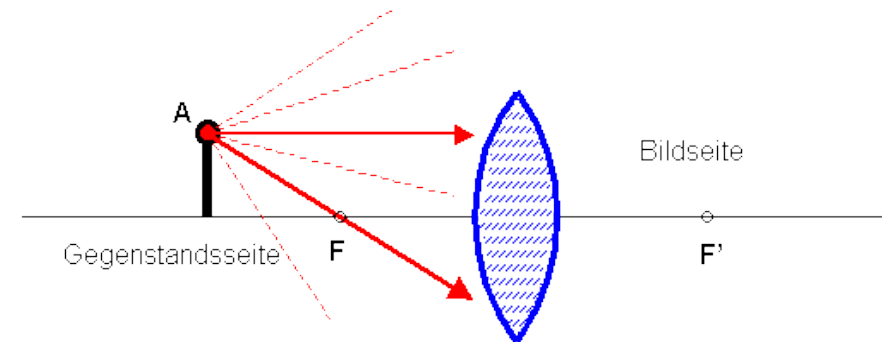


Bild 8.1: Ein divergentes Strahlenbündel vor einer bikonvexen Linse.

Vorgegeben ist eine (bikonvexe) Linse und die Lage ihrer Brennpunkte F und F'. Von einem außeraxialen Gegenstandspunkt A startet ein divergentes Strahlenbündel. Nun ist die Frage zu beantworten auf welchem (Bild-)Punkt wird dieses Strahlenbündel fokussiert?

Nun, für einen beliebigen einzelnen Strahl ist diese Frage gar nicht so leicht zu beantworten. Man müsste ihn unter Anwendung des Brechungsgesetzes durch die Linse verfolgen, um seine Position und Richtung auf der Bildseite der Linse festlegen zu können. Die ganze Angelegenheit lässt sich jedoch erheblich vereinfachen:

Für ganz bestimmte Strahlen auf der **Gegenstandsseite** kennen wir nämlich bereits den vollständigen Strahlverlauf. Dazu müssen

wir nur die beiden Regeln aus Kapitel 7 "Dünne Linsen" (Bild 7.4) anwenden:

1. Der Strahl, der auf der **Gegenstandsseite** durch den Brennpunkt F verläuft, verlässt die Linse auf der Bildseite parallel zur optischen Achse.
2. Der Strahl, der parallel zur optischen Achse einfällt, wird auf der **Bildseite** durch den Brennpunkt F' gelenkt.

Dort, wo sich die beiden Strahlen treffen, befindet sich der Bildpunkt. Die Skizze im folgenden Bild zeigt die Einzelheiten.

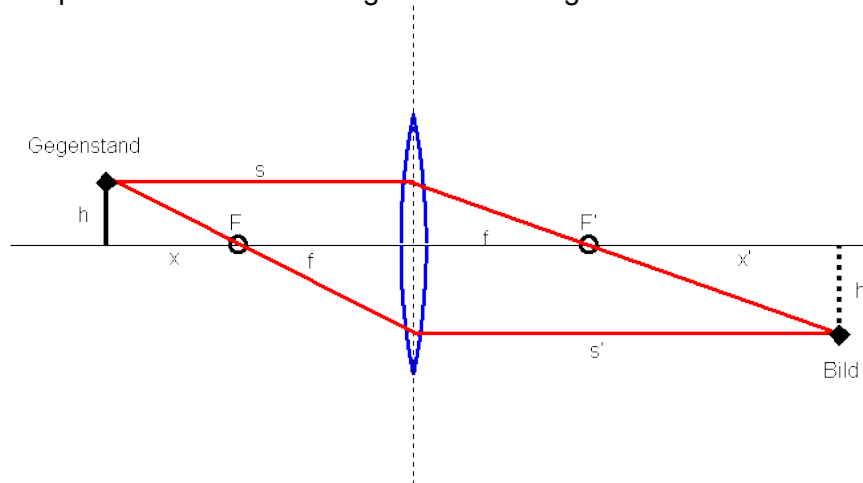


Bild 8.2: Abbildung durch eine dünne Linse.

Die **Gegenstandsweite** s ergibt sich aus der obigen Skizze zu:

$$8.1 \quad s = x + f$$

und für die **Bildweite** s' gilt:

$$8.2 \quad s' = x' + f.$$

Die Linse ist durch einen einzigen senkrechten Strich dargestellt, - daher der Name 'dünne Linse' !

Newton'sche Abbildungsgleichung

Laterale Vergrößerung = Abbildungsmaßstab = Transversalvergrößerung!

Die Autoren der verschiedenen Lehrbücher können sich leider nicht auf einen einheitlichen Begriff einigen.

Ganz wichtig ist die folgende Festlegung: Wenn die Vergrößerung negativ angegeben wird, dann ist der Gegenstand aufrecht (h positiv) und das Bild umgekehrt (h' negativ).

Bitte verfallen Sie jetzt nicht dem Irrglauben, wir hätten das Problem der Vergrößerung von optischen Systemen im Griff.

Neben der 'Lateralvergrößerung' gibt es noch den - vielleicht viel wichtigeren - Begriff der 'Winkelvergrößerung'. Bei einem Fernrohr z.B. ist die laterale Größe des Bildes auf der Netzhaut des Beobachters in aller Regel – eigentlich immer! – sehr viel kleiner als der Gegenstand (z.B. ein Kirchturm!) selbst. Aber der Blickwinkel (=Öffnungswinkel zwischen dem Kirchturmfuß und der Kirchturmspitze) unter dem der Gegenstand bei Betrachtung durch das Fernrohr erscheint hat sich vergrößert. Aber darüber unterhalten wir uns an anderer Stelle! (Kapitel 9.1)

Setzen wir dies in die Linsengleichung 7.8. ($1/s + 1/s' = 1/f$) ein, dann erhält man:

$$8.3 \quad x'x = f^2$$

wobei x und x' die jeweiligen Abstände zum Brennpunkt sind.

Wenn sich also der Gegenstand im Brennpunkt befindet, d.h. $x = 0$, dann befindet sich das Bild ($x' = f^2 / x$) im 'Unendlichen', - was das auch immer heißen mag!

Mit Hilfe des 'Strahlensatzes' lassen sich aus dem obigen Bild die folgenden Zusammenhänge ablesen:

$$8.4 \quad h' / f = h / x$$

Daraus ergibt sich die (laterale) Vergrößerung $v_L = h' / h$ zu:

$$8.5 \quad v_L = h' / h = f / x$$

Je dichter der Gegenstand an den Brennpunkt heranrückt (d.h. $x \rightarrow 0$) um so größer wird das Bild. Wenn Sie Newton'sche Gleichung (8.3) zu Rate ziehen, dann stellen Sie fest, dass dieses unendlich große Bild auch unendlich weit entfernt ist.

Hier die wichtigsten Ergebnisse, die wir aus den Skizzen 8.3 zur Abbildung durch eine dünne bikonvexe Linse ableiten können:

1. Das "Bild" steht immer auf dem Kopf.
2. Wenn der Gegenstand mehr als der doppelten Brennweite entfernt steht, ist das Bild verkleinert.
3. Wenn sich der "Gegenstand" im Punkt $2F$ (doppelte Brennweite) befindet, dann ist das "Bild" genauso groß wie der "Gegenstand" und der Abstand zur Linse ist ebenfalls die doppelte Brennweite (Punkt $2F'$)

4. Wenn sich der "Gegenstand" zwischen den Punkten F (Brennpunkt der Linse) und 2F (doppelte Brennweite) befindet, dann wird das "Bild" vergrößert.
5. Befindet sich der Gegenstand innerhalb der Brennweite, dann ergibt sich ein „virtuelles“ Bild.
6. Befindet sich der "Gegenstand" genau im Brennpunkt F, dann ist das "Bild" unendlich weit entfernt und unendlich groß.

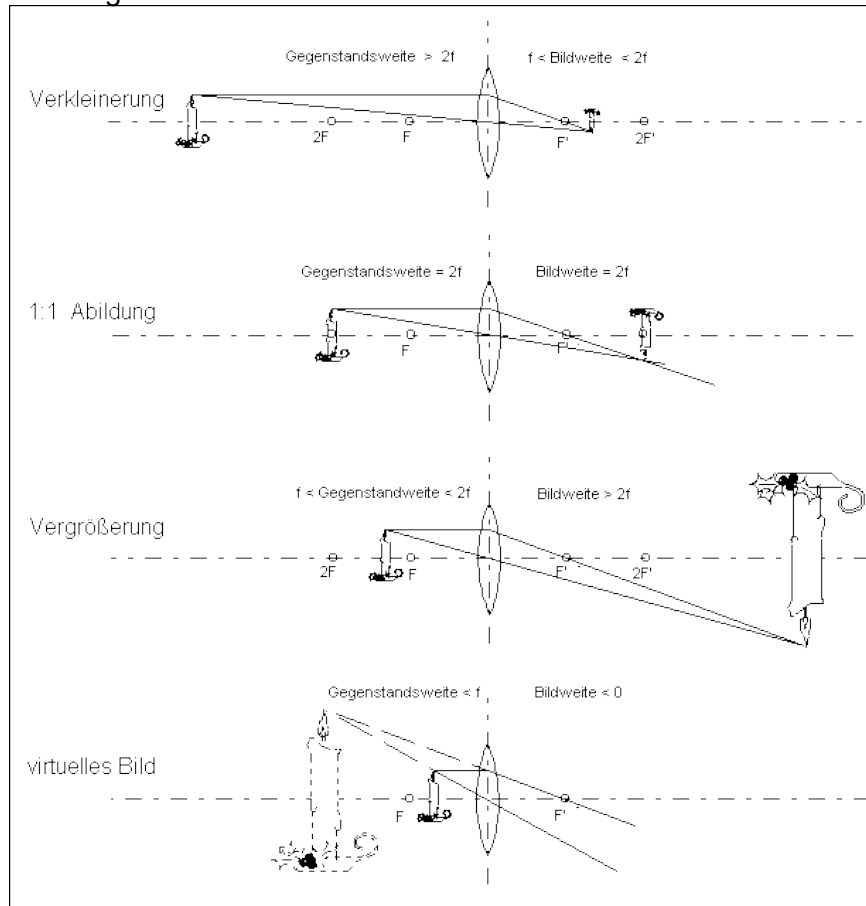


Bild 8.3: Abbildung durch eine dünne Linse bei verschiedenen Gegenstandsweiten.

Die Vergrößerung und die Entfernung des Bildes von der abbildenden Linse (Bildweite) hängt direkt von der Gegenstandsweite ab. Wenn der Abstand des Gegenstandes zur Linse kleiner als die Brennweite ist, dann entsteht überhaupt kein reelles Bild mehr, sondern nur noch ein virtuelles, zu dessen Betrachtung eine weitere Optik, - z.B. das Auge -, notwendig ist. Zur Vervollständigung dieses Überblicks kann vielleicht auch die folgende Tabelle dienen:

Gegenstandsweite s	Bildweite s'	Vergrößerung v	Bildlage
$s > 2f$	$f < s' < 2f$	$v < 1$	umgekehrt
$s = 2f$	$s' = 2f$	$v = 1$	umgekehrt
$f < s < 2f$	$s' > 2f$	$v > 1$	umgekehrt
$s \leq f$	$s' < 0$	beliebig	aufrecht, virtuell

Bildweite, Vergrößerung und Bildlage einer Konvexlinse in Abhängigkeit von der Gegenstandsweite.

Ein 'reelles' Bild liegt dann vor, wenn man einen Schirm in den Strahlengang halten kann und darauf ein Bild des Gegenstandes entsteht. Bei einem '**virtuellen**' Bild ist das nicht der Fall. Trotzdem ist ein 'virtuelles' Bild nicht nutzlos, - man muss nur eine weitere Abbildung durchführen, z.B. mit dem Auge, und dann entsteht ein reelles Bild auf der Netzhaut.

Interessant wird die Sache, wenn wir die Tiefenausdehnung eines Gegenstandes mit ins Kalkül ziehen. Im folgenden Bild sitzen Hund und Katze in unterschiedlicher Entfernung vor der abbildenden Linse. Wenn Sie nun mit den bisher verwendeten Rezepten die Abbildung der beiden konstruieren, dann werden Sie feststellen, dass sich auf der Bildseite der Hund näher an der Linse befindet als die Katze - auf der Gegenstandsseite ist es umgekehrt. (Außerdem ist die Katze auf der Bildseite grösser und der Hund kleiner - was der Katze sicher Mut macht – darüber hinaus stehen beide auf dem Kopf!)

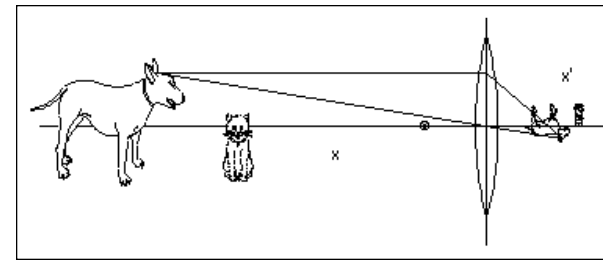


Bild 8.4: Skizze zur Tiefenausdehnung bei der Abbildung durch eine dünne Linse

Der Tiefenmaßstab v_t , - d.h. die Änderung der Bildtiefe dx' in Abhängigkeit von der Änderung der Gegenstandstiefe dx und der Gegenstandsweite x -, lässt sich formal sehr einfach aus der Newton'schen Abbildungsgleichung herleiten.

$$8.6 \quad v_t = dx' / dx = - f^2 / x^2$$

d.h. das Tiefenverhältnis ist grundsätzlich negativ, was nach den Vorzeichenkonventionen für optische Abbildungen bedeutet, dass z.B. ein ausgestreckter Zeigefinger, der auf der Gegenstandsseite in die Richtung der Linse deutet, auf der Bildseite von ihr weg zeigt.

Für die weitere Behandlung von Abbildungen - z.B. durch eine Gruppe von Linsen - müssen wir noch eine andere Frage beantworten:

Was machen Sie, wenn Sie den Verlauf eines unter beliebigem Einfallswinkel auf die Linse auftreffenden Strahls verfolgen wollen? Also z.B.:

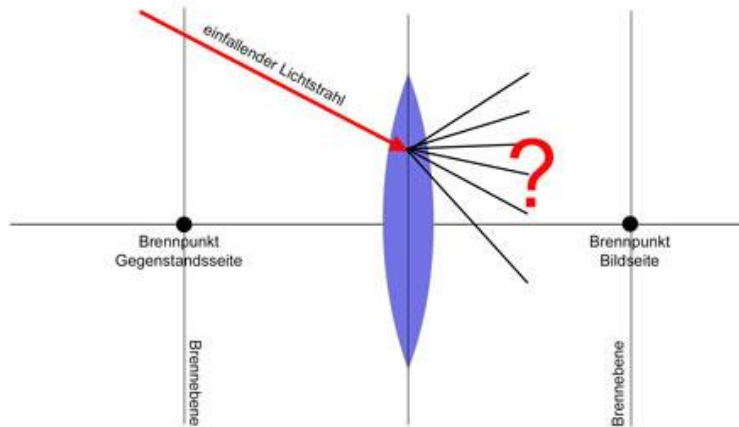


Bild 8.5 Lichtstrahl trifft unter beliebigem Winkel und beliebiger Stelle auf eine Linse – wie geht's weiter?

Der Lichtstrahl tut Ihnen leider nur ganz selten den Gefallen, entweder durch den Brennpunkt oder parallel zur optischen Achse zu verlaufen, so dass Sie die Regeln von Seite 53 verwenden können.

Hier das 'Rezept':

Ausgangspunkt der Überlegung ist die Feststellung, dass ein paralleles Strahlenbündel immer im Brennpunkt - bzw. in der Brennebene der Linse gesammelt wird.

Ein Strahlenbündel, das genau in Richtung der optischen Achse auf die Linse auftrifft, wird in einem Brennpunkt fokussiert, der auf der optischen Achse liegt. (Regel 1, Seite 53 in Kapitel 7) Ein schräg auftreffendes Strahlenbündel wird natürlich ebenfalls fokussiert, aber auf einen Brennpunkt außerhalb der optischen Achse, so, wie in der folgenden Skizze dargestellt. (Bild 8.6)

Eigentlich ist die '**Brennebene**' keine Ebene, sondern ebenfalls eine Kugelfläche, da wir uns aber auf Paraxialstrahlen - also Strahlen die in der Nähe der optischen Achse verlaufen - beschränken, kann man die 'Brennsphäre' auch als 'Brennebene' betrachten.

Bild 8.7 (links)

1. In Teilbild (a) ist zunächst ein aus einer beliebigen Richtung eintreffender Lichtstrahl dargestellt.
2. Im nächsten Teilbild (b) wird die Parallele zu diesem Strahl durch das Linsenzentrum konstruiert (Zentralstrahl) und der Schnittpunkt S mit der bildseitigen Brennebene ermittelt.
3. Da Parallelstrahlen sich grundsätzlich in einem Punkt in der Brennebene treffen, ist damit auch der weitere Verlauf des Strahls festgelegt. (c) und (d)

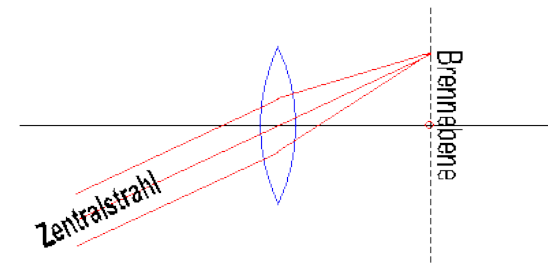


Bild 8.6: Schräg einfallendes Strahlenbündel wird in der Brennebene fokussiert

Um die Position des Brennpunktes zu ermitteln, geht man nun folgendermaßen vor:

Der Zentralstrahl eines Strahlenbündels durchläuft die (Dünne-) Linse unverändert und kreuzt die Brennebene genau an der Stelle, an der auch die übrigen Teilstrahlen eintreffen. Damit ist der Brennpunkt für dieses Bündel bestimmt.

Mit Hilfe dieser Überlegung lässt sich nun auch der Verlauf eines beliebigen Einzelstrahls durch die Linse verfolgen. Die Konstruktion ist in der folgenden Bilderserie (Bild 8.7) dargestellt.

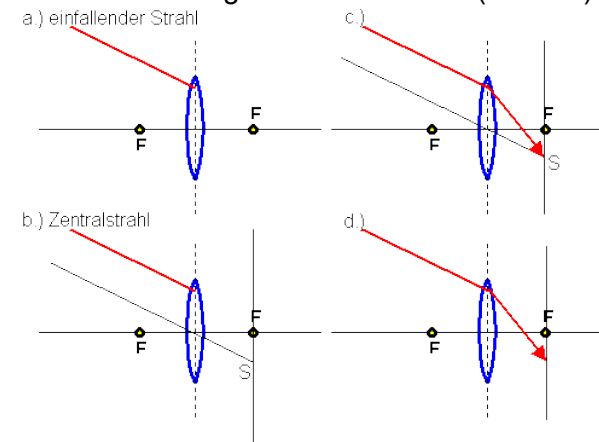


Bild 8.7: Konstruktion des Strahlverlaufes durch eine dünne Linse für einen beliebigen, schräg einfallenden Strahl.

Mit den bisher vorgestellten Werkzeugen lassen sich nun auch Abbildungen durch beliebig komplexe Linsensysteme konstruieren. In den folgenden Skizzen wird die Abbildung durch zwei dünne Linsen gezeigt.

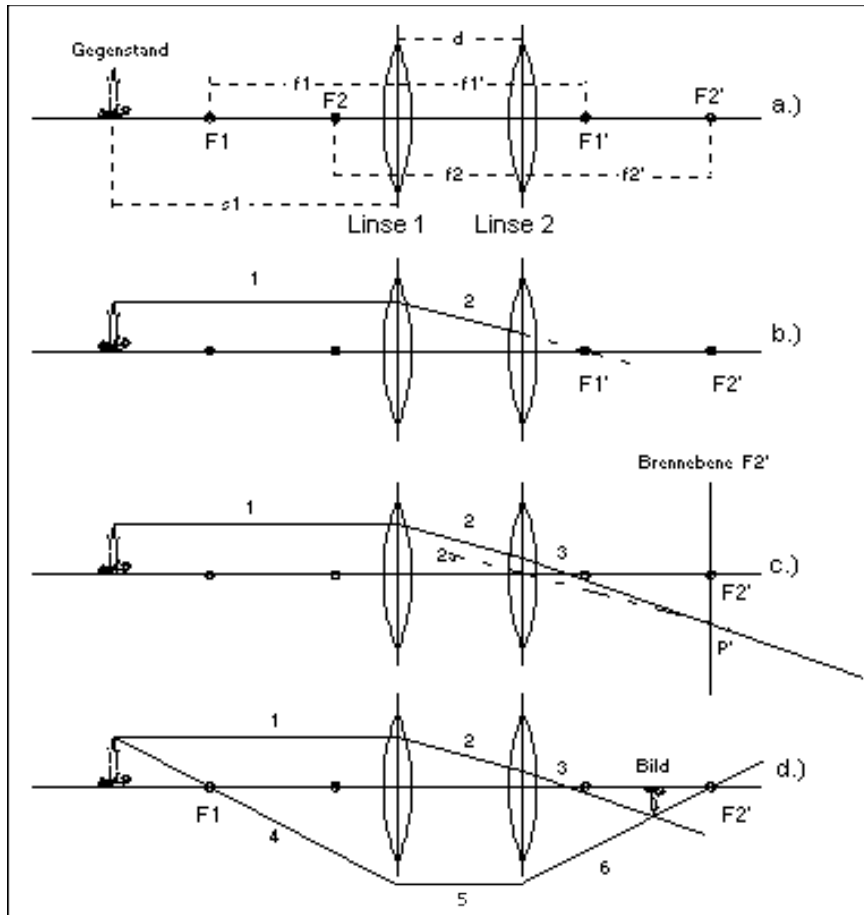


Bild 8.8: Abbildung durch ein Linsensystem

Abbildung durch ein Linsensystem. Abstand der Linsen ist kleiner die Einzelbrennweiten f_1 und f_2 .

- Zwei 'dünne' Linsen mit den Brennweiten f_1 und f_2 befinden sich in einem Abstand, der kleiner ist als die kleinste Einzelbrennweite ($d < f_1, f_2$).
- Zur Konstruktion des Bildes wird vom Gegenstand ein Parallelstrahl ('1') in Richtung auf die Linse 1 gezogen (b). Strahl '1' verlässt die Linse 1 in Richtung Brennpunkt F_1' und trifft vorher aber bereits auf Linse 2 (Strahl '2').
- Um zu ermitteln, in welcher Weise Strahl '2' von der Linse 2 beeinflusst wird, wird die Parallele von '2' durch das Zentrum der Linse 2 gezogen. (Gerade '2a' im Teilbild c). Die Gerade '2a' schneidet die Brennebene F_2' im Punkt P'. Wenn man nun den Strahl '2' durch den Punkt P' verlängert (Strahl '3'), dann ist der Verlauf dieses Teilstrahls durch das Linsensystem komplett.
- Zur Konstruktion des Bildpunktes benötigt man einen zweiten Teilstrahl. Am einfachsten benutzt man dazu den vom Gegenstand durch den Brennpunkt F_1 in Richtung auf die Linse 1 laufenden Strahl '4'. (Teilbild d) Dieser verlässt die Linse 1 parallel zur optischen Achse (Strahl '5') und wird anschließend von Linse 2 durch den Brennpunkt F_2' gelenkt (Strahl '6').
- Der Kreuzungspunkt von Strahl '3' und '6' ist der gesuchte Bildpunkt. Man erkennt, dass das gesuchte Bild umgekehrt, verkleinert und reell ist.

8.1 Brennpunkt eines Linsensystems?

Also: Nehmen wir 'mal an, auf ein Linsensystem trifft von links, also von der "Gegenstandsseite", ein zur optischen Achse paralleles Lichtbündel. Der Punkt an dem sich diese Lichtstrahlen auf der "Bildseite" des Linsensystems treffen, wäre dann der Brennpunkt des Gesamtsystems.

Bevor wir anfangen zu rechnen, sollten wir uns noch einmal die wichtigsten Parameter notieren:

s_1, s_1' - Gegenstands- und Bildweite von Linse 1
 s_2, s_2' - Gegenstands- und Bildweite von Linse 2
 F_1, F_1' - Brennpunkte der Linse 1
 f_1, f_1' - Brennweiten der Linse 1
 F_2, F_2' - Brennpunkte der Linse 2
 f_2, f_2' - Brennweiten der Linse 2
 d - Abstand der Linsen

Zur Veranschaulichung habe ich das alles in der folgenden Skizze zusammengestellt:

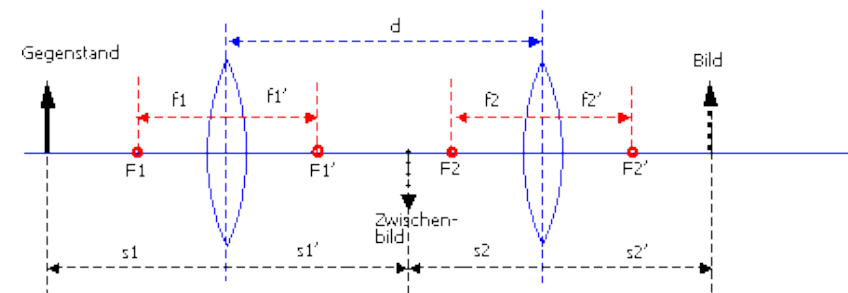


Bild 8.9: 2-Linsensystem

Was wir außerdem brauchen, ist die Linsengleichung aus Kapitel 7

7.8

$$1/s + 1/s' = 1/f$$

wobei s die Gegenstands-, s' die Bild- und f die Brennweite einer beliebigen Linse ist.

Für die zweite Linse lautet die Linsengleichung:

$$8.7 \quad 1/s_2' = 1/f_2 - 1/s_2$$

Was wollten wir noch?

Richtig, - den Abstand des effektiven Brennpunktes des Gesamtsystems von der bildseitigen Linse: f_{sys}'

Damit Sie bei der folgenden Manipulation nicht den Überblick verlieren sollte ich Ihnen verraten was wir eigentlich vorhaben: wir wollen herausfinden wie sich die Bildweite am Ausgang unseres Linsensystems s_2' verändert, wenn die Gegenstandsweite s_1 am Eingang gegen "Unendlich" geht.

Die Bildweite der zweiten Linse s_2' ist identisch mit dem Brennpunkt Abstand f_{sys}' , wenn s_1 gegen unendlich geht!

$$8.8 \quad f_{\text{sys}}' = s_2' \text{ wenn } s_1 \rightarrow \infty$$

So, jetzt wollen wir in der Linsengleichung $1/s_2' = 1/f_2 - 1/s_2$ für Linse 2 einige Ersetzungen durchführen.

Aus der obigen Skizze (Bild 8.9) ist sofort zu sehen, dass

$$8.9 \quad s_2 = d - s_1'$$

gilt. Mit Hilfe der Linsengleichung für Linse 1

$$8.10 \quad 1/f_1 = 1/s_1 + 1/s_1'$$

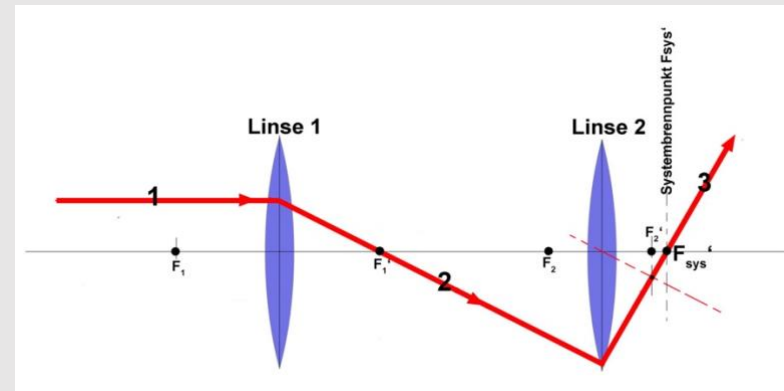


Bild 8.10: Konstruktion des Systembrennpunktes F_{sys}' auf der Bildseite.

1. Strahl 1 verläuft parallel zur optischen Achse trifft auf Linse 1 und wird zum Brennpunkt F_1' gebrochen.
2. Der gebrochene Strahl 2 trifft auf Linse 2
3. Strahl 2 wird zu einem Punkt auf der Brennebene F_2' gebrochen. (Konstruktionsprinzip für schräg einfallende Strahlen im Bild 8.7)
3. Der Schnittpunkt von Strahl 3 mit der optischen Achse ist der System Brennpunkt F_{sys}'

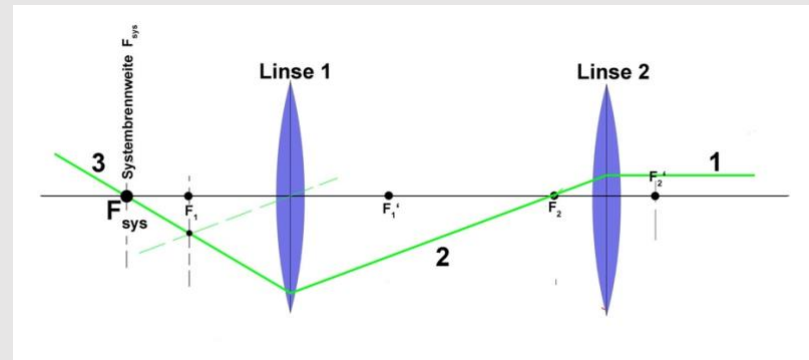
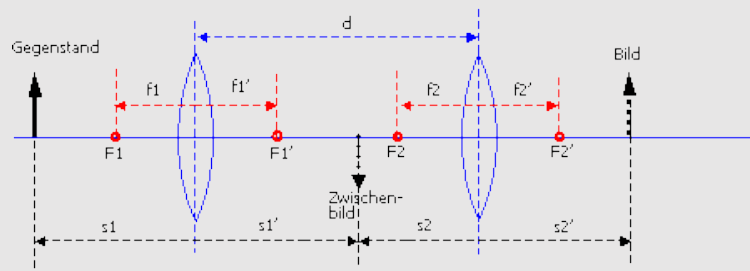


Bild 8.11: Konstruktion des Systembrennpunktes F_{sys} auf der Gegenstandsseite. (Konstruktion des Strahlverlaufes – analog zu Bild 8.10)

Die Vorzeichenkonventionen für verschiedene Abstände finden Sie in Kapitel 7.

So, das ist jetzt der oben angekündigte Zusammenhang zwischen der Bildweite s_2' am Ausgang des Linsensystems und der Gegenstandsweite s_1 am Eingang. Etwas unübersichtlich, aber das werden wir gleich vereinfachen.



s_1 gegen Unendlich heißt - in dem obigen Ausdruck gehen " f_1/s_1 " und " $d \cdot f_1/s_1$ " gegen Null.

kann außerdem s_1' durch die Gegenstandsweite s_1 ersetzt werden:

$$8.11 \quad 1/s_1' = 1/f_1 - 1/s_1 = (s_1 - f_1) / (f_1 \cdot s_1)$$

bzw.:

$$8.12 \quad s_2 = d - s_1' = d - (f_1 \cdot s_1) / (s_1 - f_1)$$

Fügt man diesen Ausdruck für die Gegenstandsweite von Linse 2 in die Linsengleichung von Linse 2,

$$8.13 \quad 1/f_2 = 1/s_2 + 1/s_2'$$

ein, dann erhält man einen Zusammenhang zwischen der Gegenstandsweite s_1 am Eingang des Linsensystems und der Bildweite s_2' am Ausgang. Die Angelegenheit ist etwas unübersichtlich, aber wir müssen es einmal hinschreiben:

$$8.14 \quad 1/s_2' = 1/f_2 - (1 - f_1/s_1) / (d - f_1 - d \cdot f_1/s_1)$$

Wenn wir nun die Gegenstandsweite s_1 gegen Unendlich gehen lassen, - was nichts anderes bedeutet, als dass wir das einfallende Licht parallel machen -, dann ist die Bildweite s_2' am Ausgang des Linsensystems identisch mit der bildseitigen Brennpunktweite f_{sys}' . (s_1 gegen Unendlich bedeutet: in 8.14 gehen " f_1/s_1 " und " $d \cdot f_1/s_1$ " gegen Null.)

$$8.15 \quad 1/f_{\text{sys}}' = (d - f_1 - f_2) / (d - f_1) \cdot f_2$$

Ganz analog lässt sich ein Ausdruck für den gegenstandsseitigen Brennpunktweite f_{sys} bestimmen:

$$8.16 \quad 1/f_{\text{sys}} = (d - f_1 - f_2) / (d - f_2) \cdot f_1$$

Zum Abschluss unserer Überlegungen lassen wir nun noch den Abstand d zwischen den Linsen verschwinden ($d = 0$!) -

d.h. die Linsen rutschen ganz dicht zusammen - und wir erhalten sowohl für den gegenstandsseitigen Brennpunktstand f_{sys} als auch für den bildseitigen Brennpunktstand f_{sys}' des Linsensystems den Ausdruck:

$$8.17 \quad 1/f_{\text{sys}} = 1/f_{\text{sys}}' = (f_1 + f_2) / f_1 \cdot f_2$$

... und jetzt wird auch deutlich, warum wir uns bei den letzten drei Gleichungen immer mit den Reziprokwerten herumgequält haben, die letzte Beziehung lässt sich nämlich noch etwas schöner schreiben:

$$8.18 \quad 1/f_{\text{sys}} = 1/f_1 + 1/f_2$$

oder für mehrere dünne Linsen:

$$8.19 \quad 1/f_{\text{sys}} = 1/f_1 + 1/f_2 + 1/f_3 + \dots$$

D.h., man kann mehrere dünne Linsen 'hintereinanderschalten' und dann aus der Summe der Kehrwerte für die Einzelbrennweiten die Gesamtbrennweite bestimmen.

Nehmen wir 'mal an, Sie packen zwei dünne Linsen mit gleicher Brennweite f möglichst dicht zusammen. Wie groß ist der Brennpunktstand f_{sys} von beiden zusammen? Na, ganz einfach:

$$8.20 \quad 1/f_{\text{sys}} = 1/f + 1/f = 2/f,$$

oder:

$$8.21 \quad f_{\text{sys}} = f/2$$

Sie haben es sicher bereits geahnt, - der Brennpunktstand hat sich halbiert.

Jetzt wird endlich der tiefere Sinn deutlich, der hinter der Definition der **Dioptrie** steckt. Da die Dioptrie - d.h. die Brechkraft - als Kehrwert der Brennweite definiert ist, kann man die Brechkraft eines Systems, das aus mehreren Linsen besteht, einfach durch Addition der Dioptriewerte der Einzellinsen erhalten, und muss nicht erst umständlich den Kehrwert berechnen. (Voraussetzung ist selbstverständlich, dass es sich um '**dünne**' Linsen handelt!)

8.2 Zwei-Linsen-System mit „teleskopischem“ Strahlengang.

Das Fernrohr.

Bei diesem Spezialfall handelt es sich um ein Linsensystem, bei dem der Abstand der Linsen exakt der Summe der Brennweiten entspricht. Dieser „teleskopische“ Strahlengang hat große praktische Bedeutung:

1. Es existiert kein Systembrennpunkt, d.h. ein paralleles Strahlenbündel tritt auch wieder parallel aus.
2. Durch geeignete Brennweiten von Linse 1 und Linse 2, kann das Verhältnis der beiden Strahldurchmesser und damit die Leuchtdichte des austretenden Strahls deutlich vergrößert werden. Ein paralleles Lichtbündel mit großem Durchmesser kann auf diese Art ohne Verluste in einen sehr dünnen Lichtleiter eingekoppelt werden.

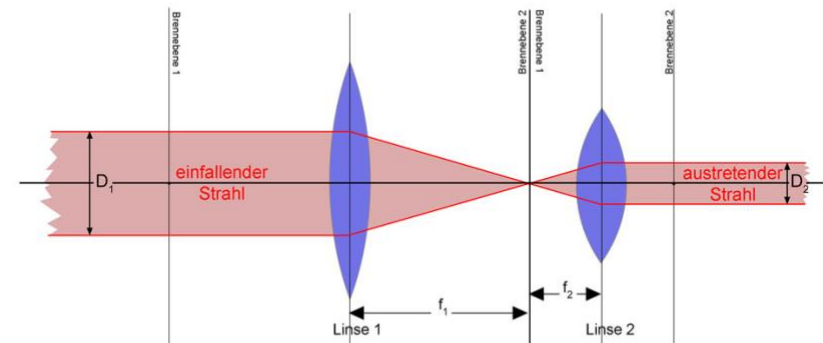


Bild 8.19 Teleskopischer Strahlengang (Reduzierung des Strahldurchmessers.)

Aus der Skizze im Bild 8.19 ist leicht abzulesen, dass sich das Verhältnis der Strahldurchmesser D_1/D_2 aus dem Verhältnis der Brennweiten ergibt:

$$8.22 \quad D_1/D_2 = f_1/f_2$$

3. Die wichtigste Anwendung findet der „teleskopische“ Strahlengang – wie der Name schon sagt – in einem Teleskop. In diesem Fall geht es um die Eigenschaft des Fernrohrs das Verhältnis von Einfallswinkel / Ausfallswinkel zu vergrößern (s.d. Kapitel 9.1 -Winkelvergrößerung)

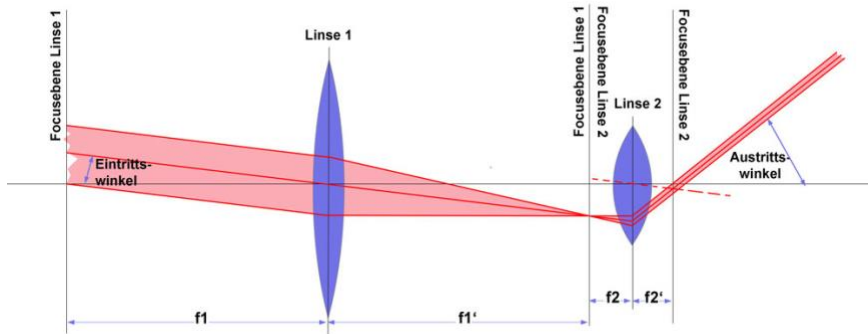


Bild 8.20 Teleskopischer Strahlengang – (Winkelvergrößerung)

Es geht hier um die Tatsache, dass der Austrittswinkel des Strahlenbündels größer ist als der Eintrittswinkel. Es handelt sich dabei um den Effekt der Winkelvergrößerung, der bei einem Fernglas das betrachtete Objekt größer erscheinen lässt. (s.d. Kapitel 9.1)

Aus Bild 8.20 ist qualitativ zu erkennen, dass der Austrittswinkel größer als der Eintrittswinkel ist. In der folgenden Skizze sind die entscheidenden Strecken noch einmal hervorgehoben. Danach berechnen sich der Eintrittswinkel α zu

$$8.23 \quad \tan \alpha = h/(f_1' + f_2)$$

und der Austrittswinkel β zu

$$8.25 \quad \tan \beta = h/\underline{BC}.$$

Wenn man nun $\underline{BC} \approx f_2'$ setzt (Näherung für Paraxialstrahlen), dann kann man für das Verhältnis der Winkel schreiben

$$8.26 \quad \tan \alpha / \tan \beta = f_2 / (f_1' + f_2)$$

Daraus folgt für die Winkelvergrößerung $v = \beta / \alpha$ – mit etwas gutem Willen! –

$$8.27 \quad v_{\text{Winkel}} = f_1/f_2. \quad *)$$

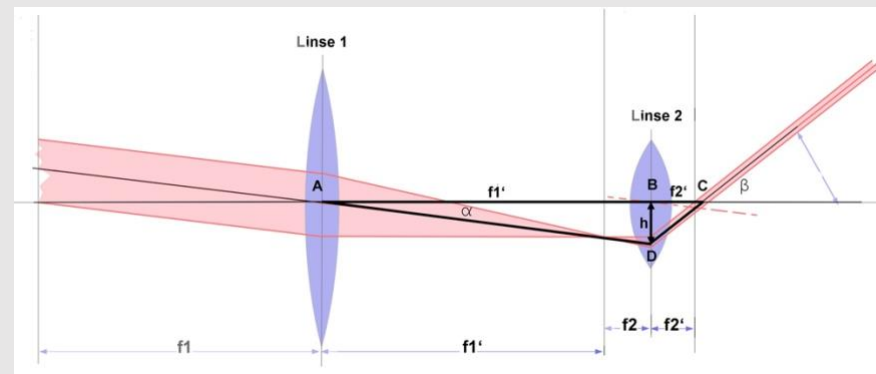


Bild 8.21: Konstruktionselemente eines teleskopischen Strahlengangs.

*) In dieser Berechnung der Fernrohr-Winkelvergrößerung stecken einige Menge Näherungen, z.B. $\underline{BC} \approx f_2$ oder $f_2 \ll f_1$ und $\tan \alpha \approx \alpha$ und $\tan \beta \approx \beta$, aber mit diesen Näherungen bewegen wir uns in guter Gesellschaft.

8.3 Hauptebenen

In unseren bisherigen Überlegungen zur Funktion von Linsen und Linsensystemen haben wir einen Linsentyp vorausgesetzt, den es eigentlich gar nicht gibt: die **dünne Linse**!

Wir haben bei "dünnen" Linsen den eigentlichen Linsenkörper vernachlässigt und die Ablenkung des Lichtstrahls immer an einer (fiktiven?) Mittelebene beginnen lassen. (Schauen Sie sich den Strahlverlauf durch eine "dünne" Linse darauf noch 'mal an. Kapitel 7, Seite 48)

Um diesen „Betrug“ zu kaschieren, wurde in den Skizzen zu den verschiedenen Abbildungsstrahlengängen immer ein „Linsensymbol“ eingetragen, - eine physikalische Funktion hatte dieser Linsenkörper aber nicht. Hier noch einmal – zur Erinnerung der Abbildungsstrahlengang durch eine einzelne bikonvexe Linse (Bild 8.2):

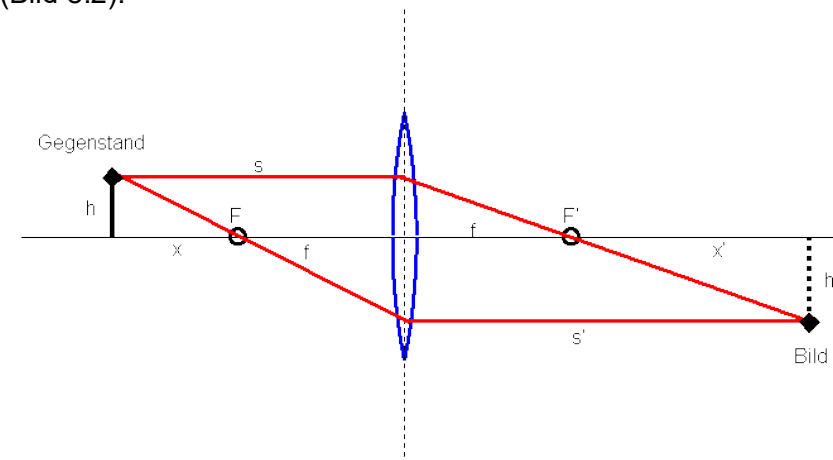


Bild 8.2: Abbildungsstrahlengang durch eine „dünne“ Linse.

Tatsächlich müsste man den Abbildungsstrahlengang durch eine „dicke“ Linse, also eine Linse mit einem voluminösen Linsenkörper, in etwa so zeichnen:

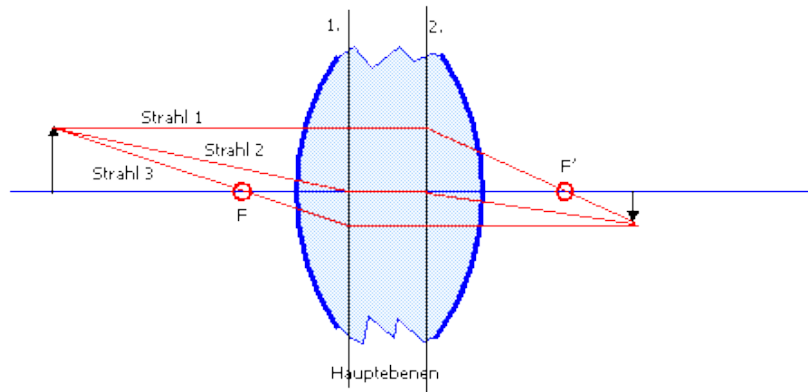


Bild 8.22: „Dicke“ Linse mit Hauptebenen

In dieser „dicken Linse“ sind als Konstruktionshilfe zwei Hauptebenen eingezeichnet. Wenn diese Hauptebenen vorhanden sind, verfährt man zur Konstruktion des Abbildungsstrahlengangs auf folgende Weise:

1. Der **parallel zur optischen Achse** einfallende Strahl 1 auf der linken Seite wird bis zu 2. Hauptebene verlängert und dort zum Brennpunkt F' hin gebrochen.
2. Der sog. Mittelpunktstrahl (Strahl 2) wird bis zum Fußpunkt der Hauptebene 1 gezogen, **parallel zur optischen Achse** weitergeführt und an Hauptebene 2 parallel zum einfallenden Strahl 2 weitergeführt.
3. Der Strahl 3 durch den linken Brennpunkt (Brennpunktstrahl) wird bis zur Hauptebene 1 verlängert und von dort **parallel zur optischen Achse** weitergeführt.

Die genaue Berechnung an welcher Stelle im Glaskörper der "dicken" Linse die Hauptebenen zu suchen sind wollen wir uns an dieser Stelle ersparen. Für den Spezialfall einer symmetrischen Bikonvexlinse hat jede Hauptebene vom nächst gelegenen Scheitel der Linse - in etwa - den Abstand

"Dicke" Linsen sind, - wie der Name schon sagt -, das Gegenteil von "dünnen" Linsen. "Dicke" Linsen lassen sich nicht einfach durch eine Mittelebene ersetzen, weil der Linsenkörper zwischen Vorder- und Rückseite so dick ist, dass dies für die Bestimmung des Strahlverlaufes berücksichtigt werden muss.

8.28

 $d / 2n$

Dabei ist 'd' die Dicke der Linse in der Mitte und 'n' der Brechungsindex.

Ok, - soviel der Vollständigkeit halber zu den Hauptebenen einer einzelnen „dicken“ Linse. Hauptebenen spielen aber auch eine Rolle bei der Konstruktion von Strahlverläufen durch ein Linsensystem.

Hauptebene eines Systems aus zwei 'dünnen' Bikonvexlinsen:

Zur Bestimmung der **bildseitigen Hauptebene** wird der (von der linken Seite) parallel zur optischen Achse einfallende Lichtstrahl bis zum Ausgang des Linsensystems (auf der rechten Seite) verlängert. Der Schnittpunkt mit dem aus dem Linsensystem austretenden Strahl definiert dann die Position der Hauptebene. (Für die **gegenstandsseitige** Hauptebene müsste der Strahlverlauf umgekehrt werden.) Der Schnittpunkt des aus dem Linsensystem austretenden Strahls mit der optischen Achse ergibt den Brennpunkt des Linsensystems (Systembrennpunkt). Die **Systembrennweite** ist definiert als der Abstand des **Systembrennpunktes** von der zugehörigen **Hauptebene**.

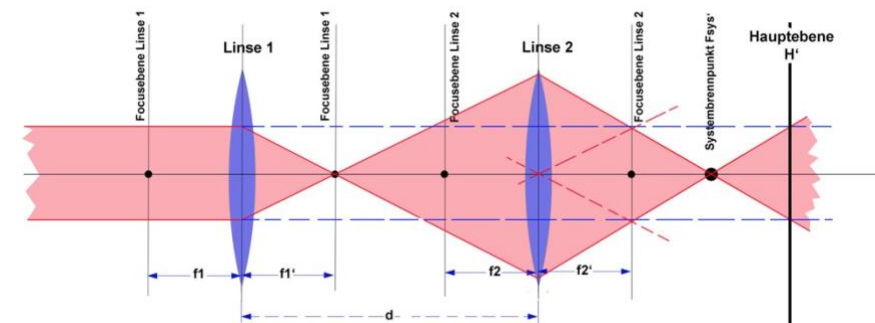


Bild 8.23: Hauptebene eines Linsensystems aus zwei „dünnen“ Bikonvexlinsen.

Zur besseren Übersicht soll hier die Konstruktion der bild- und der gegenstandsseitigen Hauptebenen für ein Linsensystem mit zwei unterschiedlichen Brennweiten wiederholt werden:

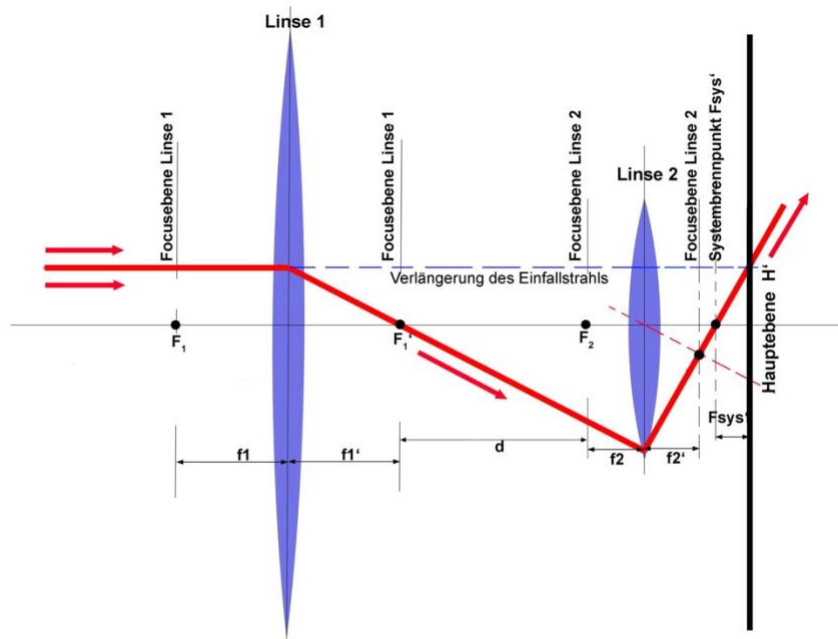


Bild 8.24: Konstruktion der bildseitigen Hauptebene H' und des Systembrennpunktes F_{sys}' für einen von Links (Objektseite) einfallenden Strahl.

Im Bild 8.24 wird der Verlauf des von links einfallenden (roten) Strahls durch ein System aus zwei Linsen mit unterschiedlichen Brennweiten konstruiert:

1. Der von Links einfallende Strahl verläuft parallel zur optischen Achse und trifft auf Linse 1;
2. In Linse 1 wird der Strahl zum Brennpunkt F_1' gebrochen und trifft in der Verlängerung auf Linse 2;

In Linse 2 wird der Strahl erneut gebrochen und verläuft durch den vom parallelen Zentralstrahl (rot gestrichelt) markierten Brennpunkt in der Focusebene von Linse 2;

3. Der Systembrennpunkt. F_{sys} ist durch den Schnittpunkt des Strahls mit der optischen Achse definiert;
4. Die Lage der bildseitigen Hauptebene H' ist durch den Schnittpunkt des austretenden Strahls mit der Verlängerung des einfallenden Strahls (blau gestrichelt) definiert.

In der nächsten Skizze wird der Einfall des Strahls von rechts gezeigt. Der Strahlverlauf ist analog zu dem eben beschriebenen.

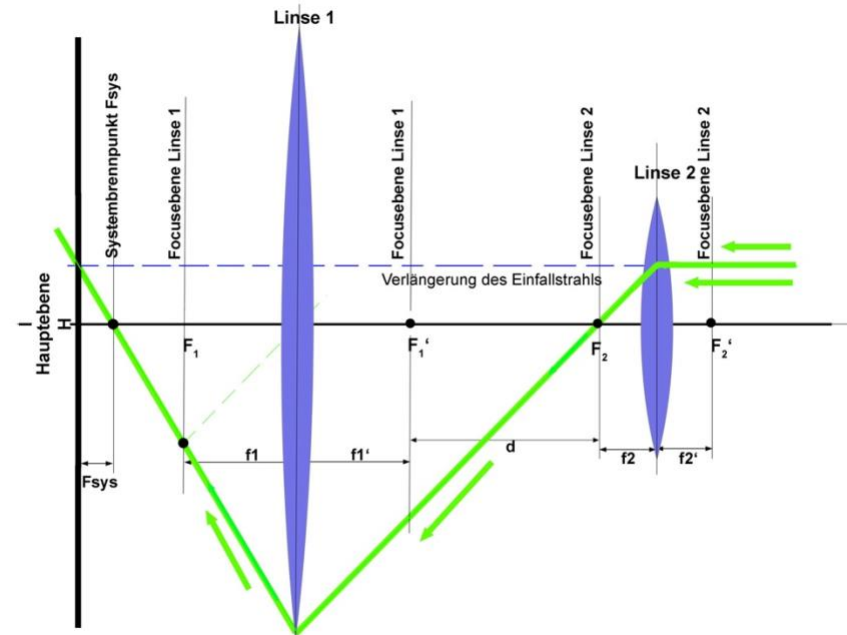


Bild 8.25: Konstruktion der objektseitigen Hauptebene H und des Systembrennpunktes F_{sys} für einen von rechts (Bildseite) einfallenden Strahl.

Konstruktion des Abbildungsstrahlenganges mit Hilfe der Hauptebenen.

Wir haben nun in den Bildern 8.10- 8.11 die **Systembrennweiten** und in 8.23 – 8.25 die **Hauptebenen** eines Linsensystems bestimmt.

Warum? Im Gegensatz zu einer einzelnen Linse, kann die Konstruktion eines Strahlenganges durch ein Linsensystem, insbesondere wenn viele Linsen im Spiel sind, recht aufwändig sein. Hauptebene und Systembrennweite vereinfachen die Konstruktion des Abbildungsstrahlenganges ganz erheblich.

Zur Erinnerung hier links nochmal das Prinzipbild einer „**dicken**“ **Linse** mit ihren Hauptebenen.

Für die Konstruktion eines Strahlengangs durch ein **Linsensystem**, repräsentiert durch Hauptebenen H und H' , sowie durch die Systembrennweiten F_{sys} und F_{sys}' ist das Rezept nun ganz ähnlich. Zur Demonstration hier die Hauptebenen und die Systembrennweiten eines Linsensystems:

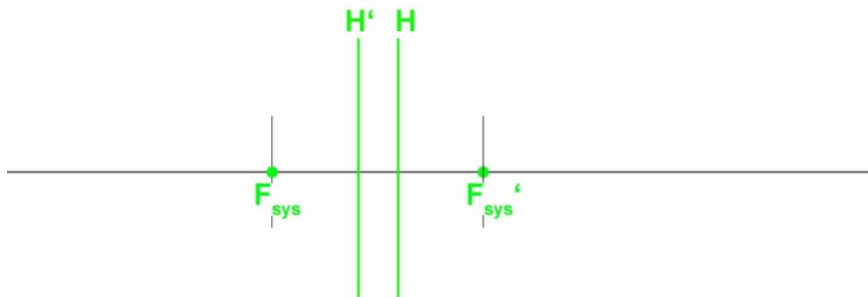


Bild 8.26: Hauptebenen H , H' und Systembrennweiten F_{sys} , F_{sys}' eines Linsensystems.

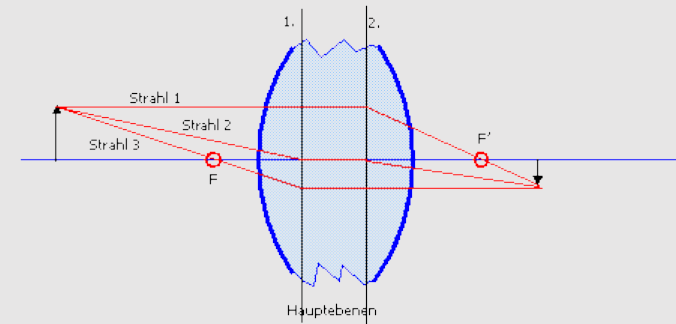


Bild 8.22. „Dicke“ Linse mit Hauptebenen.

Konstruktion des Strahlengangs durch eine „dicke“ Linse mit Hilfe von Hauptebenen:

1. Der **parallel zur optischen Achse** einfallende Strahl 1 wird bis zur 2.Hauptebene verlängert und dort zum Brennpunkt F' hin gebrochen.
2. Der sog. Mittelpunktstrahl (Strahl 2) wird bis zum Fußpunkt der Hauptebene 1 gezogen, **auf der optischen Achse** weitergeführt und an Hauptebene 2 parallel zum einfallenden Strahl 2 weitergeführt.
3. Der Strahl 3 durch den linken Brennpunkt (Brennpunktstrahl) wird bis zur Hauptebene 1 verlängert und von dort **parallel zur optischen Achse** weitergeführt

Die vertauschten Hauptebenen. H' und H im Bild 8.26 und 8.27 ergeben sich aus den in den Bildern 8.24 und 8.25 gezeigten Konstruktionen. Ich habe diese etwas exotische Linsenordnung mit den vertauschten Hauptebenen gewählt, um das Hauptebenenverfahren für die Konstruktion der Abbildung zu verdeutlichen.

Hinter dem Beispiel aus Bild 8.26 verbirgt sich die folgende Linsenordnung:

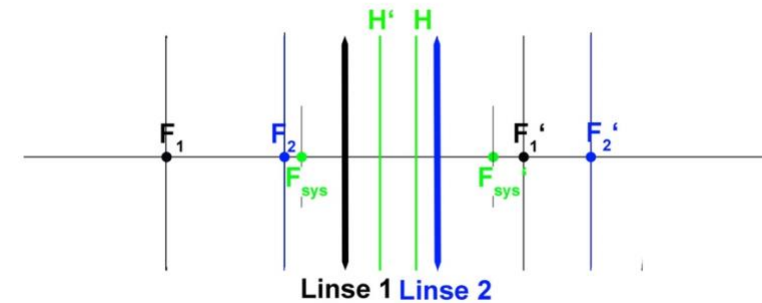


Bild 8.27: Linsensystem (Linse 1 und Linse 2) mit den zugehörigen Einzelbrennweiten (F_1 , F_1' , F_2 , F_2') und den Hauptebenen H und H' .

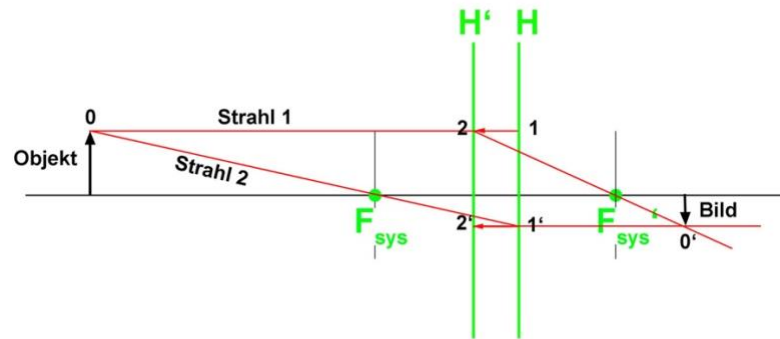
Sie erinnern sich: Bei einer einzelnen Linse ist die Brennweite identisch mit dem Abstand zwischen dem Brennpunkt und der Linse selbst. (Bei 'dicken' Linsen gilt das nur näherungsweise!)

Bei einem Linsensystem ist das ganz anders: Die Brennweite des Gesamtsystems (= Abstand zwischen Hauptebene und dem zugehörigen Brennpunkt) sowie die Lage der Hauptebenen (bild- und objektseitig) hat wenig mit der Anordnung der Linsen und den Abmessungen des Systems zu tun.

Bei genauerer Betrachtung der Skizze in den Bildern 8.26 und 8.27 fällt auf, dass die Hauptebenen H und H' im Vergleich zu der üblichen Darstellung vertauscht zu sein scheinen:

- gestrichene Größen. (z.B. F' oder F_{sys}') werden normalerweise auf der Bildseite angeordnet;
- ungestrichene Größen auf der Objektseite.

In den Skizzen 8.26 und 8.27 ist die Reihenfolge der Hauptebenen H und H' vertauscht. Das muss beim Abbildungsstrahlengang durch die Hauptebene berücksichtigt werden, wie im folgenden Bild zu sehen ist:



Bild

8.28: Abbildungsstrahlengang mit Hilfe von Hauptebenen.

Im Bild 8.28 verläuft Strahl 1 parallel zur optischen Achse und trifft zunächst auf Punkt 1 auf der **objektseitigen** Hauptebene H . Von dort läuft er zurück (!) zu Punkt 2 auf der bildseitigen Hauptebene H' und von dort weiter durch den bildseitigen Brennpunkt F_{sys} .

Der Brennpunktstrahl 2 läuft vom **objektseitigen** Systembrennpunkt F_{sys} ebenfalls bis zur **objektseitigen** Hauptebene H und von dort zurück zur **bildseitigen** Hauptebene H' und zum Schnittpunkt 0' mit Strahl 1.

Man kann den Abbildungsstrahlengang natürlich auch mit Hilfe der Abbildung durch die einzelnen Linsen konstruieren. Das Ergebnis ist im Bild 8.29 gezeigt. Die Abbildung des Objektes führt bei dem Linsenstrahlengang selbstverständlich zum gleichen Ergebnis wie die Abbildung mit Hilfe der Hauptebenen und Systembrennweiten. In dem hier gezeigten Beispiel ist der Aufwand der beiden Abbildungskonstruktionen vergleichbar groß.

Die vergleichsweise einfachere Konstruktion des Hauptebenenverfahrens wird aber bei großen komplexen Systemen mit mehr als zwei oder drei Linsen sehr schnell deutlich.

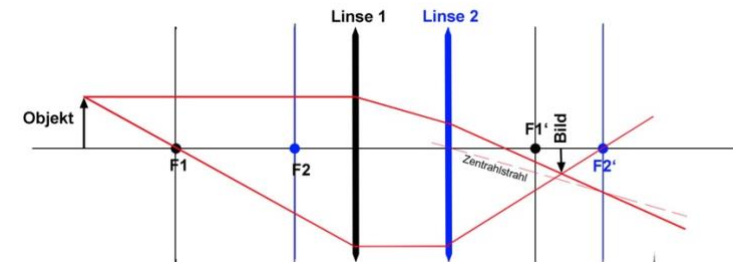


Bild 8.29: Abbildungsstrahlengang durch das Linsensystem aus Bild 8.27

9. Optische Instrumente

Vorbemerkung zum Thema "Vergrößerung"

Bevor wir uns im folgenden Kapitel mit den Details einiger optischen Systeme beschäftigen, sollten wir uns kurz mit dem Begriff der VERGRÖßERUNG beschäftigen, denn die Mehrzahl der optischen Instrumente die wir als "Normalverbraucher" benutzen, haben die Aufgabe etwas zu vergrößern, zu verkleinern, oder ganz allgemein abzubilden.

Ganz naiv stellt sich wohl jeder von uns die Vergrößerung (oder Verkleinerung?) eines optischen Systems als Verhältnis von Gegenstandsgröße G zu Bildgröße B vor. Also:

$$9.1 \quad V = B / G.$$

Diese Art der Vergrößerung bezeichnet man als **Lateralvergrößerung**, bzw. **Abbildungsmaßstab**.

Im Kapitel 8 (Gleichung 8.5) hatten wir uns überlegt, dass sich diese Vergrößerung im Falle einer einzelnen (dünnen) Linse durch

$$9.2 \quad V_L = f / x$$

ausdrücken lässt, wobei f die Brennweite der verwendeten Linse und x der Abstand des abzubildenden Objektes vom gegenstandsseitigen Brennpunkt ist.

Es wird Sie (vielleicht) wundern, dass diese Definition der Vergrößerung nur auf die wenigsten optischen Instrumente angewendet werden kann!

Von den vielen optischen "Haushaltsgeräten" ist der Begriff der Lateralvergrößerung nur für den Diaprojektor und vielleicht noch für die Kamera (Makrofotografie) von Bedeutung!

Ich bin mir nicht sicher - aber ich denke, bei all jenen optischen Instrumenten bei denen das Auge des Beobachters in den Strahlengang mit einbezogen werden muss, um eine vollständige Beschreibung der Bildentstehung zu erhalten, - überall dort kommt die Winkelvergrößerung ins Spiel.

Für die Lupe, das Mikroskop, das Fernrohr und schließlich auch das Auge in seiner Funktion als optisches Instrument würde die Lateralvergrößerung keine sinnvolle Aussage darstellen, hier ist die

Winkelvergrößerung

Viel wichtiger. Was ist damit gemeint?

Im folgenden Bild ist das Prinzip dargestellt

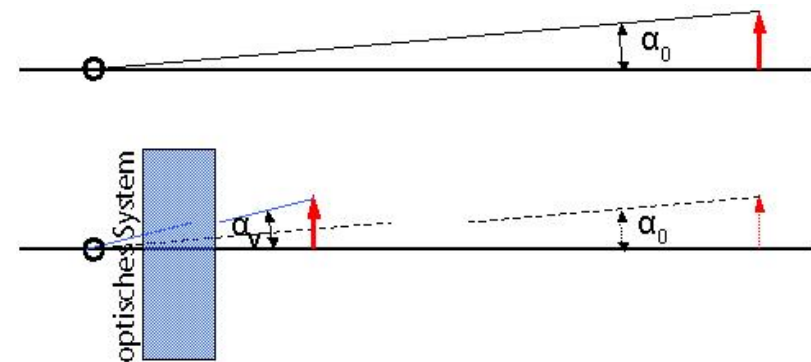


Bild 9.1: Winkelvergrößerung

Ein weit entfernter Gegenstand (roter Pfeil) erscheint ohne Benutzung optischer Hilfsmittel unter dem Sehwinkel (Öffnungswinkel, Gesichtswinkel): α_0 .

Als Winkelvergrößerung v_w bezeichnet man nun das Verhältnis der beiden Sehwinkel:

$$9.1 \quad v_w = \alpha_v / \alpha_0$$

So, das ist die Winkelvergrößerung. - Wir kommen bei der Erläuterung der einzelnen Instrumente darauf zurück.

Merken Sie was?

Bei der Winkelvergrößerung kommt es nicht darauf an, dass der betrachtete / abzubildende Gegenstand lateral, d.h. in seinen Abmessungen, vergrößert wird: Wichtig ist nur, dass sein Abbild möglichst dicht an das Auge herangeschoben wird, um den Sehwinkel zu vergrößern.

Ein gutes Beispiel liefert das Fernrohr. Wir hatten im Kapitel 8.2 (Seite 65-66) den „teleskopischen Strahlengang“ besprochen und die bei dieser Linsenordnung auftretenden Winkelvergrößerung erläutert: Wenn Sie mit einem Fernrohr z.B. einen weit entfernten Kirchturm betrachten, dann wird das im Fernrohr erzeugte Zwischenbild des Kirchturms nicht etwa vergrößert (wie sollte das auch funktionieren?), sondern verkleinert und gleichzeitig so dicht ans Auge herangeschoben, dass der Sehwinkel größer wird.

Erinnern Sie sich, - wir hatten diese Art der Vergrößerung bereits im Kapitel 8 besprochen (Gleichung 8.5), als wir uns mit Abbildungen beschäftigt haben.



9.2 Optische Instrumente - Das Auge

Wenn wir uns in der Optik mit der Entstehung von Bildern beschäftigen, dann steht dahinter immer ein Ziel: das Bild muss, in welcher Weise auch immer, auf der Netzhaut des Betrachters ankommen. Erst dann ist es im direkten Wortsinn 'sichtbar' geworden. Ohne das Sinnesorgan 'Auge' gäbe es auch die Optik nicht - zumindest nicht in der hier diskutierten Form.

Licht ist - Sie wissen es bereits - eine elektromagnetische Welle und als solche kann es zur Signalübertragung genutzt werden, ganz ähnlich wie es auch in anderen Frequenzbereichen des Spektrums elektromagnetischer Wellen geschieht: denken Sie z.B. an Radio, Fernsehen oder Radar. Hier wird der elektromagnetischen Welle die zu übertragende Information in Form einer Modulation aufgeprägt, die dann am Ort des Empfängers durch geeignete 'Demodulatoren' ausgelesen wird.

Auch wenn dieser Vorgang mit hoher Geschwindigkeit abläuft, die einzelnen Informationselemente (Pulse, Frequenz-, Amplitudenmodulationen) treffen zeitlich nacheinander am Empfänger ein.

Die mit den Mitteln der Optik realisierte Art der Signal- bzw. Informationsübertragung ist im Vergleich zur konventionellen Hf-Technik ungleich komplexer: Während die Hochfrequenztechnik Informationsübertragung durch die Modulation eines einzelnen (Träger-)Wellenzuges realisiert, wird in der abbildenden Optik eine ganze Gruppe elektromagnetischer (Licht-) Wellenzüge verarbeitet, so dass neben der zeitlichen Variation von Frequenz und Phasenlage der einzelnen Teilwellenzüge auch räumliche Informationen übertragen werden können. Umgangssprachlich nennt man das Resultat einer solchen auf optischem Weg erzeugten Signalübertragung ein BILD, für welches wir mit dem Auge ein Sinnesorgan besitzen. Die zeitliche Abfolge von

Informationselementen der Hf-Technik wird in der abbildenden Optik durch eine Parallelübertragung ersetzt.

Das Auge ist in vielen Fällen das letzte Glied in einer ganzen Reihe optischer Komponenten, die erst durch eine geeignete Anordnung zueinander die gewünschte Wirkung hervorrufen, - also z.B. ein weit entferntes Gebäude näher zu rücken (Teleskop) oder einen kleinen Gegenstand zu vergrößern (Lupe, Mikroskop).

Es ist deshalb zwingend notwendig das Auge kennenzulernen, bevor wir uns mit anderen optischen Instrumenten beschäftigen.

Auf der WebSite der Technischen Fachhochschule Berlin habe ich den folgenden sehr zutreffenden Satz gefunden:

Der Sehvorgang ist durch physikalische Gesetzmäßigkeiten allein nicht erklärbar.

Neben den vielen physikalischen Einflüssen die die Leistungsfähigkeit des Auges beeinflussen, - Beleuchtung, Farbe (Wellenlänge), Objektkontrast - gibt es natürlich auch noch eine Vielzahl physiologischer Einflüsse - Adaptionfähigkeit, Zustand der Linse und des Sehnervs - und schließlich auch psychologische Randbedingungen - Aufmerksamkeit, Gemütsverfassung - die das Ergebnis unseres Sehapparates beeinflussen, in manchen Fällen sogar verfälschen können. Aber all das soll uns hier nicht kümmern, - wir beschränken uns hier auf das Auge als physikalisch-optisches Instrument.

mit herzlichem Dank an:

Kuratorium Gutes Sehen e.V.:

www.sehen.de/sehen/rund-ums-auge/das-auge-aufbau-und-funktion/)

Wissensportal LASIKON

www.lasikon.de/auge/aufbau-des-auges/

Also los !

Hier sehen Sie die wesentlichen Funktionselemente des Auges

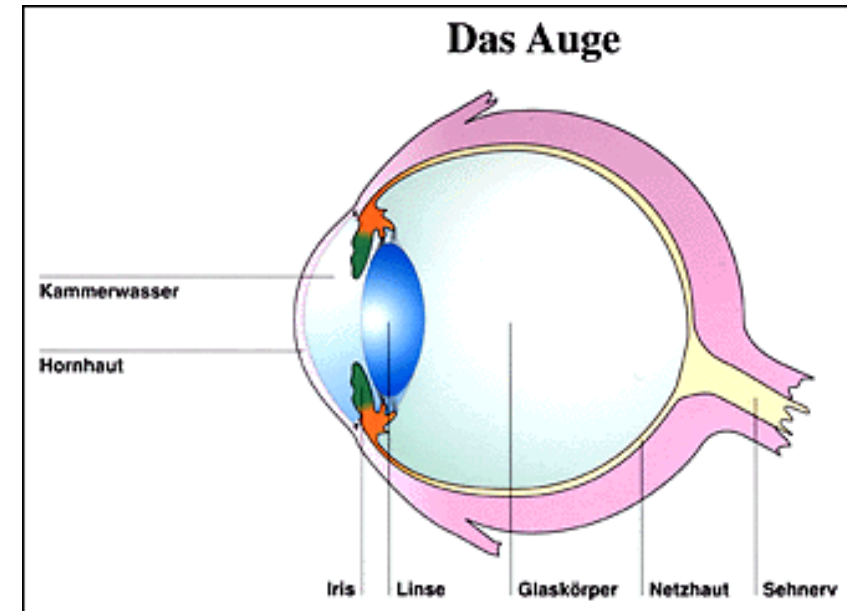


Bild 9.2: Das Auge

Ich denke die obige Skizze ist weitgehend selbsterklärend.

In einem ersten Schritt wollen wir 'mal so tun, als ob es sich beim Auge um eine simple Abbildung durch eine (dünne?) Linse handelt. Das ist zwar nicht ganz richtig, - eigentlich ist es sogar grottenfalsch (s.u.) -, aber mit dieser Vereinfachung finden wir uns in guter Gesellschaft mit den meisten Physiklehrbüchern.

Abbildungen durch eine Linse haben wir schon vielfach diskutiert – z.B. im Kapitel 8. Sie erinnern sich bestimmt, dass der Abstand des Bildes hinter der Linse direkt vom Abstand des abzubildenden Gegenstandes vor der Linse abhängt. Wenn sich nun der Abstand des Gegenstandes ändert, dann ändert sich auch die Position des Bildes. Um ein scharfes Bild zu erhalten müsste man deshalb den

Abstand zwischen Linse und der Netzhaut einstellbar halten. Beim Auge ist das nun so ohne weiteres nicht möglich. Der Abstand zwischen der Linse und der Netzhaut ist durch die Abmessungen des Augapfels fest vorgegeben. (Übrigens, dieser Abstand beträgt beim Erwachsenen etwa 22-23 mm und beim neugeborenen Kind ca. 17 mm.)

Was also ist zu tun?

Um sich auf unterschiedliche Objektabstände einstellen zu können, wird nicht wie beim Diaprojektor die Position der Linse, sondern die Brennweite derselben verändert.

Je näher das Objekt an das Auge heranrückt, um so stärker krümmt sich die Linse und in der Folge wird die Brennweite kürzer.

Rein technisch wird das im Auge dadurch realisiert, dass die Linse vom sog. **Ziliarmuskel** zusammengedrückt wird. Je stärker dieser Muskel ist, um so mehr kann er die Linse wölben ("zusammendrücken") und um so näher kann das Objekt an das Auge heranrücken und wird trotzdem noch scharf gesehen.

Beim Kind ist diese Fähigkeit sehr stark ausgeprägt, der dichtest mögliche Objektabstand kann bis zu 6 cm betragen. Je älter der Mensch wird, um so mehr lässt die Elastizität der Augenlinse nach, so dass die Grenze scharfen Sehens bei einem 30-Jährigen bei etwa 15 cm, bei einem 50-Jährigen bei 40 cm und im hohen Alter bei einigen Metern liegt.

So, und jetzt versuchen wir 'mal das optische Instrument Auge halbwegs vollständig zu beschreiben:

In der folgenden Skizze habe ich versucht die wichtigsten Elemente aufzuführen. Wie Sie sehen besteht der optische Apparat des Auges nicht nur aus der so häufig erwähnten Linse, sondern aus einer Vielzahl von Komponenten, die in ihrer Bedeutung für das Gesamtsystem (zumindest für den Neuling!) auf den ersten Blick gar nicht zu erkennen sind.

Eine Zusammenstellung sämtlicher Daten des menschlichen Auges findet sich am Ende dieses Kapitels.

Das ist übrigens der Grund für die **altersbedingte Weitsichtigkeit**: "die Augen sind noch gut, aber die Arme sind zu kurz"!

Ich zähle 'mal auf, - in der Reihenfolge wie das Licht von außen kommend, das Auge durchläuft:

Cornea - Vorkammer - Linsenrinde - Linse - Linsenrinde - Glaskörper.

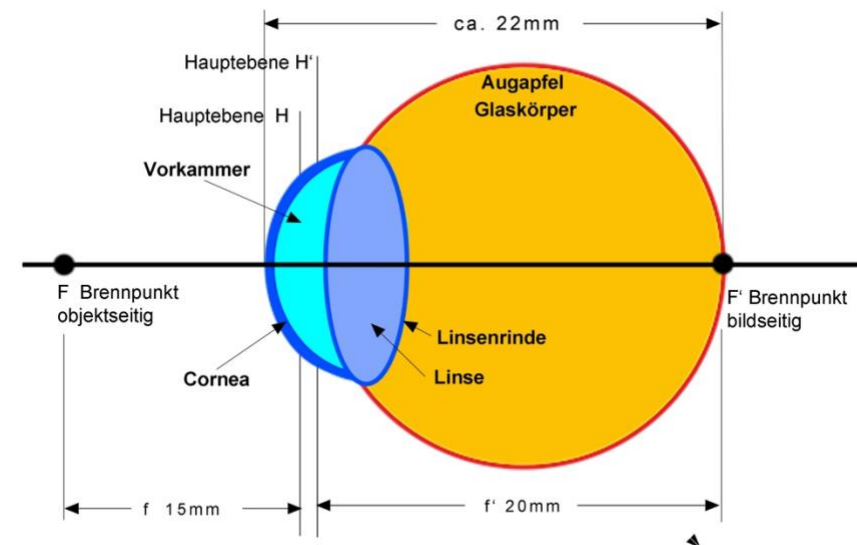


Bild 9.3: Die wichtigsten (optischen) Elemente im Auge.

Bezeichnung	Abmessungen/ Dicke (mm) *)	Brechungsindex	Brechkraft (dpt) **)
Cornea	0,52 - 0,67	1,376	43
Vorkammer	ca 3,6	1,336 ****)	
Linsenrinde	0,546	1,386	
Linsenkern	2,419	1,406	
Linse - Gesamtsystem	3,6		19,33
Glaskörper	15,18	1,336	
Auge - Gesamtsystem	22,36		58,64 ***)

*) auf der optischen Achse

**) dpt = Dioptrie; Dioptrie ist der Kehrwert der Brennweite f in Metern:

Beispiel: $f = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$ entspricht $1/f = 1/0,1 = 10$ Dioptrien. Oder 50 dpt entsprechen $f = 1/50 = 0,02 \text{ m} = 2 \text{ cm}$ Brennweite

***) gilt für das entspannte (fernakkommodierte) Auge; 58,64 dpt entspricht einer Brennweite von $1/58,64 = 0,0175 \text{ m} = 17,05 \text{ mm}$

****) das entspricht in etwa dem Brechungsindex von Wasser;

Es wird Sie vielleicht wundern, dass wir neben der "normalen" Linse im Auge noch ein weiteres fokussierendes Element finden, - die sog. Cornea.

Der vordere Krümmungsradius der Cornea beträgt 7,7 mm und der Krümmungsradius der hinteren Grenzfläche beträgt 6,8 mm. Im Kapitel 7 wird dieser Linsentyp "meniskuskonkav" genannt.

Hier zur Veranschaulichung das Prinzipbild der Cornea. Und bitte beachten Sie: Obwohl die Cornea gar nicht nach einer Linse aussieht, - aus der unterschiedlichen Krümmung von Vorder- und Rückseite und den verschiedenen n Brechungsindizes vor (Luft) und hinter (Vorkammer) der Cornea resultiert eine relativ starke Brechkraft von ca. 43 Dioptrien.

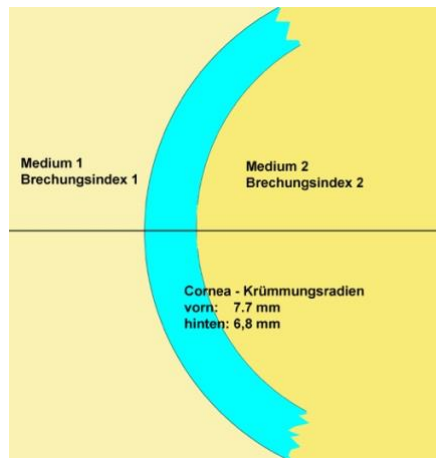


Bild 9.4: Prinzipbild der Cornea.

Bevor wir uns dem Auge als rein geometrisch-optischen Instrument nähern, noch ein Wort zu den **Augenfehlern** und - wegen der zunehmenden Verbreitung von Digitalkameras - eine kurze Betrachtung zum Auflösungsvermögen des menschlichen Auges und die daraus folgenden Anforderungen an einen digitalen Bildsensor.

Eine einfache Sehhilfe:

Wenn Sie selbst unter Fehlsichtigkeit leiden, dann können Sie ein interessantes Selbstexperiment unternehmen: Stechen Sie mit einer Nadel ein ganz kleines Loch in ein Stück Papier und halten Sie dieses Papier/Loch ganz dicht vor eines Ihrer Augen. Na, was sehen Sie? In der Regel sollte sich die Schärfe des betrachteten Objektes deutlich verbessern! Also wenn Sie wirklich 'mal die Brille verlegt haben

Hätten Sie eine Erklärung für dieses Phänomen? Es hat 'was mit der Schärfentiefe - nicht mit der "Tiefenschärfe"! Die Fotografen unter Ihnen kennen diesen Effekt von ihrer Kamera.

Sie sollten sich an Hand des [Strahlenganges bei einer "dünnen" Linse](#) (Kapitel 8 !) noch 'mal ansehen, wie sich der Abstand des Bildes von der Linse vergrößert, wenn Sie das Objekt näher an die Linse heranschieben.

In entspannten Zustand ist das Auge auf "Unendlich" eingestellt. D.h. ein weit entfernter Gegenstand wird scharf gesehen. In dieser Situation ist der Ziliarmuskel, der sich wie ein Ring um den Linsenkörper legt, nicht angespannt, die Linse ist flach. Wenn ein näher liegender Gegenstand scharf abgebildet werden soll, dann muss der Ziliarmuskel die Linse stärker krümmen. Das funktioniert um so besser, je kräftiger der Ziliarmuskel und je elastischer die Augenlinse ist, - d.h. in jungen Jahren wird man die zu betrachtenden Gegenstände sehr nah an die Augen heranführen können, - im Alter sind dann die Arme nicht mehr lang genug!

Wir haben das bereits oben diskutiert.

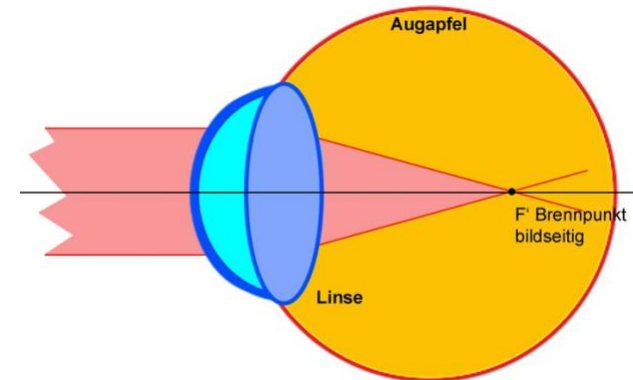
Kurzsichtigkeit – Myopie:

Bild 9.5: Kurzsichtigkeit

Ein Kurzsichtiger kann in der Nähe, auch ohne Sehhilfe, hervorragend sehen. (Daher die Bezeichnung "kurzsichtig".)

Weiter entfernte Gegenstände nimmt er nur unscharf wahr. Durch blinzeln, bzw. zusammenkneifen der Augenlider gelingt es ihm zwar bis zu einem gewissen Grad auch weiter entfernte Objekte scharf zu sehen, aber die Sache hat ihre Grenzen.

Übrigens, - dieses Blinzeln hat der Kurzsichtigkeit ihren medizinischen Namen gegeben. "Myops" heißt im Griechischen "Blinzelgesicht" und "Myopie" ist der daraus abgeleitete Fachbegriff.

Bei Kurzsichtigkeit entsteht das Bild eines weit entfernten Gegenstandes nicht auf, sondern vor der Netzhaut, d.h. es erscheint unscharf. Erst wenn man das zu betrachtende Objekt näher an das Auge heranrückt, dann verschiebt sich auch das Bild weiter in Richtung Netzhaut und wird als scharf wahrgenommen. Diese Entfernung, bei der der Kurzsichtige das Objekt zum ersten Mal scharf sieht wird "**Fernpunkt**" genannt.

Ursache ist entweder ein zu langer Augapfel (**Achsenmyopie** - häufigere Ursache) oder eine zu starke Brechkraft des optischen Systems Cornea+Linse (**Brechungsmyopie** - relativ selten).

Dieser Fehler kann nur durch eine Reduzierung der Brechkraft des Auges korrigiert werden. Der Mechanismus der die Brechkraft der Augenlinse steuert (s.o.) kann beim entspannten Auge 'konstruktionsbedingt' nur die Brechkraft erhöhen, aber nicht reduzieren, denn dazu muss die Augenlinse noch flacher gemacht werden, als sie im entspannten Zustand bereits ist.

Die Lösung kennen Sie alle: man platziert vor das Auge eine (Zerstreuungs-)Linse mit negativer Brennweite.

Beispiel: Ein kurzsichtiges Auge kann im entspannten Zustand Gegenstände in 50 cm Entfernung scharf sehen; d.h. der sog. "Fernpunkt" des Auges liegt bei 50 cm.

In diesem Fall wird eine Korrekturlinse von -2,0 Dioptrien (entspricht einer Brennweite von $-1/2 \text{ m} = -50 \text{ cm}$) benötigt, um den "Fernpunkt" des wieder ins Unendliche zu rücken

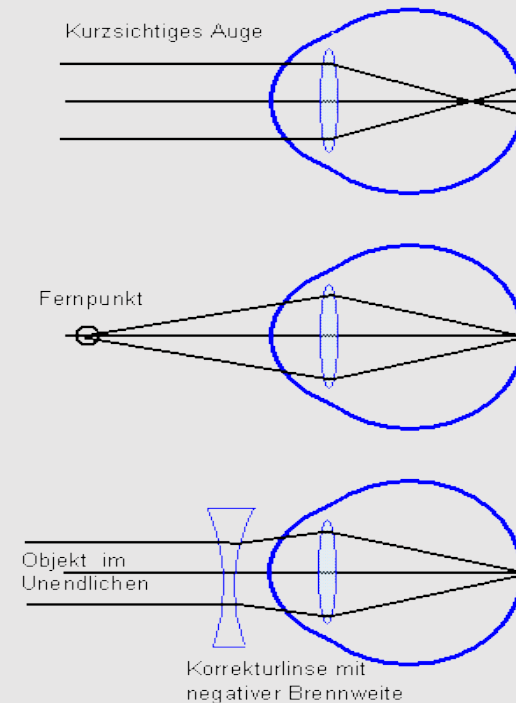


Bild 9.6: Kurzsichtiges Auge; Fernpunkt; Korrekturlinse mit negativer Brennweite.

Weitsichtigkeit – Hyperopie

Bei einem weitsichtigen Auge entsteht das Bild eines (unendlich) weit entfernten Gegenstandes - bei entspanntem Auge - hinter der Netzhaut:

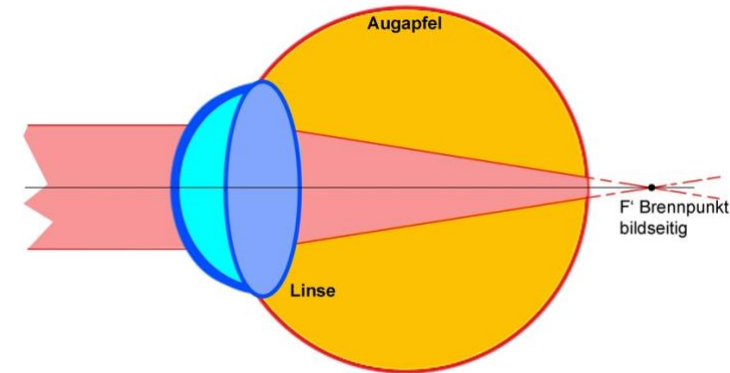


Bild 9.7: Weitsichtigkeit

Ursachen für die Weitsichtigkeit ist entweder ein zu kurzer Augapfel (**Achsenhyperopie** - häufige Ursache), oder eine zu geringe Brechkraft des optischen Systems bestehend aus Cornea und Linse. (**Brechungshyperopie** - relativ selten).

Im Gegensatz zur Kurzsichtigkeit ist das Bild für das entspannte weitsichtige Auge für jeden Objektstand unscharf. Allerdings kann der zu kurze Augapfel, bzw. die zu geringe Brechkraft der entspannten Linse durch Akkomodation, d.h. durch eine vom Ziliarmuskel erzeugte zusätzliche Linsenkrümmung, ausgeglichen werden. Das kann beim Kind und beim Jugendlichen so weit gehen, dass eine Fehlsichtigkeit zunächst gar nicht entdeckt wird. Da das weitsichtige Auge für alle Objektstände akkomodieren muss kann sich die dazu notwendige Muskulatur niemals entspannen, was, zumindest beim älteren Menschen, sehr schnell

zu erheblichen Beschwerden (Augen- und Kopfschmerzen) führen kann. Darüber bewirkt die ständige Überlastung der Ziliarmuskel insbesondere bei Frühgeborenen eine Fehlstellung der Augen, so dass die Augen ein Objekt nicht gleichzeitig fixieren können. (Schielen, bzw. Strabismus)

Abhilfe schafft auch hier eine Brille, diesmal allerdings mit positiver Brennweite, um die fehlende Brechkraft der Augenlinse zu ergänzen.

Hier die wichtigsten 'technischen' Daten des Auges:

(Die Daten stammen von der Web-Site der Berliner Hochschule für Technik: www.bht-berlin.de/.)

- Durchmesser des Augapfels Erwachsener:	22-23 mm
- Durchmesser des Augapfels neugeborenes Kind:	17 mm
Umfang des Augapfels	75 mm
Augeninnendruck	12 - 21 mmHg
Tränenproduktion Erwachsener	38 mg/h
Tränenproduktion Kinder	84 mg/h
Pupillendurchmesser	1,2 - 9 mm
Dicke der Linse: Neugeborenes	3,5 mm
Dicke der Linse: Kind, 10 Jahre	3,9 mm
Dicke der Linse: Erwachsener 20-50 Jahre	4,1mm
Dicke der Linse: Erwachsener 60-70 Jahre	4,8 mm
Dicke der Linse: Erwachsener 80-90 Jahre	5,0 mm
Brechkraft der Linse	19 - 33 Dioptrien
Zahl der Stäbchen (zuständig für Hel-Dunkelunterschiede.)	125 Mio
Zahl der Zapfen (zuständig für das Farbsehen)	7 Mio
Kleinster Sehwinkel unter dem Objekteinheiten noch getrennt wahrgenommen werden.	1 ' Winkelminute *)
Kleinster Sehwinkel unter dem Objekteinheiten noch getrennt wahrgenommen werden. (bequemes Sehen !)	4' Winkelminute *)
Empfindlichkeit von maximaler Helladaption bis zu voller Dunkeladaption	1: 106

s.d.: Kuratorium Gutes Sehen e.V.

www.sehen.de/sehen/sehschwaeche/schielen-strabismus/



Bild 9.8: Steve Sasson mit der von ihm entwickelten Kodak-Digitalkamera.

Auflösungsvermögen des Auges:

Im „digitalen Zeitalter“ ist die Frage nach dem Auflösungsvermögen eines optischen Gerätes, z.B. einer Kamera, eines Projektors (Beamers) oder eines Displays - von besonderer Bedeutung und hat fast schon den Charakter einer Kennzahl für den sozialen Status seines Besitzers.

Die erste „Digitalkamera“ von KODAK aus dem Jahr 1974 von Steve Sasson hatte 10 000 Pixel, wog 3,6 Kilo und benötigte 23 Sekunden um ein Bild auf einer Musikkassette zu speichern.

Nun, die Zeiten haben sich geändert: Eine der besten Serienkameras, die Canon EOS 5DS, hat einen 50 Millionen-Pixel-Sensor (50 Megapixel /50 MP) und bei Spezialkameras wird von 100 bis 3200 Megapixel berichtet.

Für die Astronomie oder spezielle Bereiche der Mikrofotografie können diese extremen Auflösungen durchaus sinnvoll sein, - aber wir diskutieren hier gerade die Eigenschaften des menschlichen Auges und da stellt sich natürlich die Frage wie hoch ist die Auflösung des Auges und wie muss ein digitaler Sensor beschaffen sein um mit den Leistungsdaten des Auges konkurrieren zu können?

Mir ist klar, dass das Auflösungsvermögen des Auges, nicht durch einen einzigen Parameter charakterisiert werden kann. Da spielen das Schwarz-Weiß- und das Farbsehen, die Helligkeit, Größe und Form des Gesichtsfeldes und die Verteilung der 120 Millionen Stäbchen (für die Helligkeit) und der 6 Millionen Zäpfchen (für die Farbe) auf der Netzhaut eine wichtige Rolle.

Aber für eine erste Abschätzung des Auflösungsvermögens könnte vielleicht der folgende Ansatz weiterhelfen:

- das Gesichtsfeld des Auges hat eine Ausdehnung von ca. 107 Grad horizontal und 60 Grad vertikal.
- Die Winkelauflösung beträgt etwa 1 Bogenminute; d.h. zwei Objekte, die vom Standpunkt des Beobachters unter einem Winkel von 1 Bogenminute (oder mehr) erscheinen, können unterschieden werden.
- Daraus folgt, dass im Gesichtsfeld von $107^\circ \times 60^\circ$, bei einer Winkelauflösung von 1 Bogenminute insgesamt 6420×3600 Objekte unterschieden werden können

Es wurde bereits mehrfach betont, dass es sich bei diesen Zahlen nur um Größenordnungen handelt, aber für einen groben Vergleich „digitaler“ Kameras mit dem „analogen“ Auge mögen sie hinreichen:

Aus den obigen Abschätzungen geht hervor, dass das Auge bei einer Winkelauflösung von 1 Bogenminute und einem Gesichtsfeld von $107^\circ \times 60^\circ$ insgesamt $6420 \times 3600 = 23,1$ Millionen unterschiedliche Objekte auflösen kann.

Es ist vermutlich kein Zufall, dass viele der modernen Digitalkameras über eine in etwa vergleichbare Pixelzahl verfügen. Man könnte sagen, dass diese Kameras bezüglich der Bildauflösung einen Bildeindruck liefern, der ungefähr dem natürlichen Seheindruck entspricht

Daraus folgt, dass ein 30cm großes Objekt in einer Entfernung von **1000m** noch wahrgenommen wird und in einer Sichtweite von **25cm** Entfernung sollten Objektdetails von 0,075 mm (75 Mikrometer) unterschieden werden können.

Das ist - für das „unbewaffnete“ Auge – eine erstaunliche Leistung. Einschränkend muss allerdings festgehalten werden, dass diese Werte nicht für das ganze Gesichtsfeld, sondern nur im Zentrum erreicht werden.



Bild 9.9: Leselupe. (<https://de.wikipedia.org/wiki/Lupe>)



Bild 9.10: Uhrmacherlupe
(www.lupe24.de/lupenprogramm/uhrmacherlupen/uhrmacherlupe-tech-line.html)

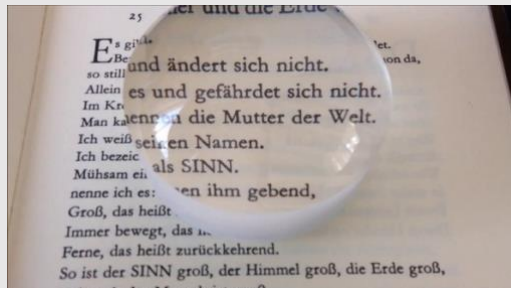


Bild 9.11: Aufgelegter „Lesestein“ zur Vergrößerung eines Textes. (<https://light-microscope.net/de/geschichte-der-mikroskopie/geschichte-des-lesesteins/>)

9.2 Optische Instrumente – Lupe

Die Lupe zeichnet sich in der Reihe der optischen Instrumente durch einige Besonderheiten aus.

1. Es ist vermutlich das älteste bekannte optische Instrument. Die frühesten Funde stammen aus der Bronzezeit, ca. 2200-800 v.Chr. (<https://de.wikipedia.org/wiki/Lupe>)
2. Die Lupe ist eigentlich kein eigenständiges optisches Gerät, denn als „Lupe“ sie funktioniert nur im Zusammenspiel mit dem Auge. Im Grunde hat die Lupe eine ganz ähnliche Funktion wie eine Brille die zum Ausgleich der Weitsichtigkeit benutzt wird, allerdings mit sehr viel kürzerer Brennweite um Nahsicht zu ermöglichen

Mit der Bezeichnung „Lupe“ verbinden sich unterschiedliche Nutzungsarten:

- Leselupe mit großem Gesichtsfeld und großem Abstand zum Auge, aber relativ kleiner Vergrößerung. (2- 6 fach) (Bild 9.9)
- Detail-, bzw. Uhrmacherlupe, hohe Vergrößerung (5-15 fach), kleines Gesichtsfeld und kleiner Abstand zum Auge. (Bild 9.10)

Eine Sonderform bilden die sog. „Lesesteine“ oder „Lesestäbe“, die direkt auf den Text aufgelegt werden. (Bild 9.11)

Obwohl die hier beispielhaft genannten Geräte in der Literatur unter dem Oberbegriff „Lupe“ aufgeführt werden, ist die Funktionsweise doch recht unterschiedlich. Ich will mich hier auf die im Bild 9.10 gezeigte „Uhrmacherlupe“ konzentrieren und zwar aus zwei Gründen:

- a. Dieser Lupentyp kann nur im Zusammenspiel mit dem Auge verstanden werden und passt deshalb sehr gut in dieses Kapitel.
- b. Die Beschreibungen in der Literatur (Internet) sind überwiegend unvollständig und beschränken sich in der Regel auf eine kurze Diskussion der Vergrößerung.

OK, wo fangen wir an?

Vielleicht so:

Wenn wir einen Gegenstand genau betrachten wollen, dann gehen wir möglichst nah heran, oder wir versuchen den Gegenstand möglichst dicht ans Auge zu führen.

Das ist eine ganz natürliche Verhaltensweise. Um Gegenstände aus der Nähe betrachten zu können, muss die Brennweite der Augenlinse immer kürzer werden. Das geschieht durch den sog. Ziliarmuskel, ein Ringmuskel rund um die Augenlinse, der die Linse zusammendrückt, also dicker macht und damit die Brennweite immer kürzer. D.h. je kräftiger der Ziliarmuskel die Linse zusammendrücken kann, um so näher können wir das Objekt an das Auge heranrücken und damit größer sehen.

Im Bild 9.12 ist dieser Vorgang schematisch dargestellt:

In der ersten Skizze A, befindet sich das betrachtete Objekt (schwarzer Pfeil) dicht vor dem Auge. Damit das Bild auf der Netzhaut scharf abgebildet werden kann, wird die Augenlinse durch den Ziliarmuskel stark zusammengedrückt und dadurch die Brennweite verkürzt. Wenn sich der Abstand des Objektes vom Auge weiter vergrößert (Bild 9.12 B, mittlere Sehweite), entspannt sich der Ziliarmuskel, die Augenlinse wird flacher, die Brennweite länger, das Bild kleiner.

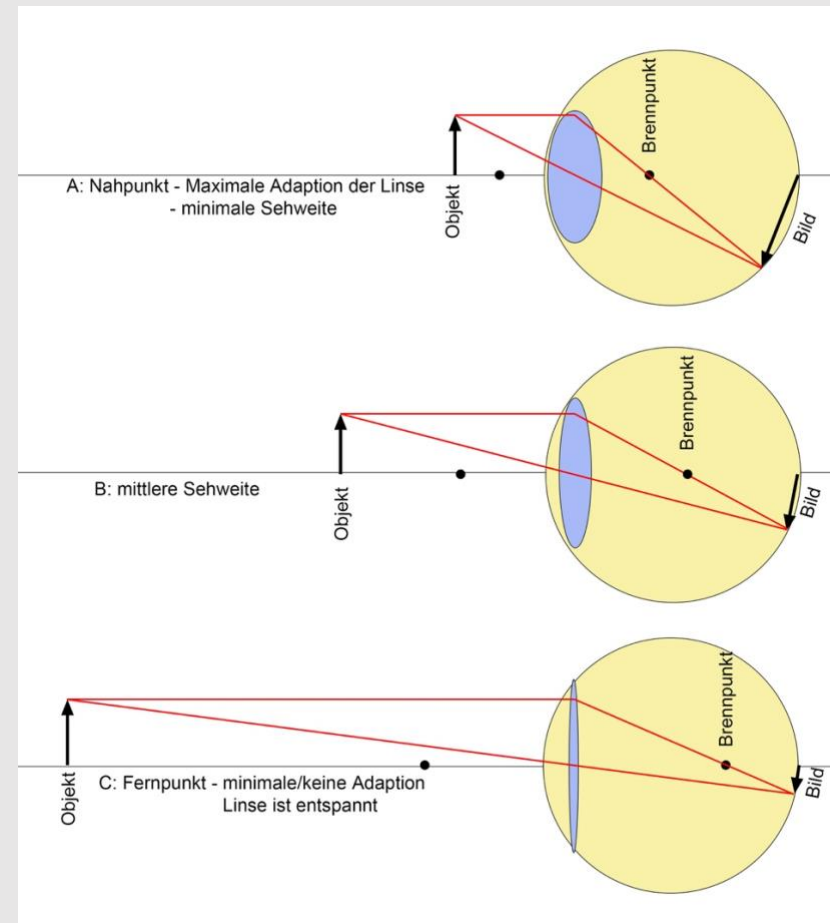


Bild 9.12: Objekt (schwarzer Pfeil) in unterschiedlichen Abständen vom Auge. Je näher das Objekt an das Auge herangeführt wird, um so mehr muss die Brennweite der Augenlinse durch den Ziliarmuskel verkürzt werden, damit eine scharfe Abbildung auf der Netzhaut entsteht.

Die kontinuierliche Adaption der Brennweite an die geänderte Entfernung des Objektes macht die Diskussion der Augenoptik etwas ungewohnt. In der Technik steht uns ein Bauelement mit automatisch gepasster Brennweite nicht zur Verfügung und kommt deshalb in der Systematik der „geometrischen Optik“ auch nicht vor; entsprechend „hilflos“ ist die Darstellung der Lupenoptik in der (technischen) Literatur.

Bei einem noch größeren Abstand (Bild 9.12 C, Fernpunkt) des Objektes ist der Ziliarmuskel vollkommen entspannt, die Brennweite der Augenlinse hat den Maximalwert erreicht. Da die Brennweite der Augenlinse ständig angepasst (adaptiert) wird, bleibt das Bild auf der Netzhaut scharf, wird aber mit zunehmender Entfernung ständig kleiner.

Das funktioniert bei Kindern recht gut – der kürzest mögliche Abstand zum Auge liegt bei etwa 10cm - bei älteren und alten Menschen verhärtet sich der Linsenkörper und die Kraft des Ziliarmuskels lässt nach. D.h. die Augenlinse kann nicht mehr auf Objekte in kurzer Entfernung vor dem Auge adaptiert werden, oder anders formuliert der „Nahpunkt“, d.h. der kleinste mögliche Abstand bei dem das Objekt noch scharf abgebildet wird, rückt immer weiter weg. (Bei älteren Menschen kann der „Nahpunkt“ durchaus bei 2 bis 3 Metern liegen!)

Aber selbst, wenn uns die Fähigkeit auch auf sehr kurze Entfernung scharf sehen zu können erhalten bliebe, für den Uhrmacher oder Juwelier wäre das immer noch nicht ausreichend

Was ist zu tun?

Eine weitere Verformung der Augenlinse, bzw. eine weitere Verkürzung des Nahpunktes scheidet aus, -hier gibt es eine biologische Grenze. Wir müssen eine Möglichkeit finden durch externe Hilfsmittel die Brechkraft der Linse zu vergrößern, bzw. die Brennweite zu verkürzen. Dafür gibt es bereits ein erprobtes Mittel: die **Brille** und zwar die Brille eines Weitsichtigen mit Sammellinsen!

Wie bereits im Kapitel 9.2 erläutert (Seite 87, 88), muss bei einem Weitsichtigen die Brechkraft der Augenlinse durch eine zusätzliche Sammellinse (Brille) verstärkt werden. Wenn wir allerdings im Sinne einer Lupenwirkung den Nahpunkt noch dichter an das Auge heranholen wollen, dann müssen wir die Brechkraft dieser (Lupen-)Brille noch sehr viel weiter erhöhen.

Wir sollten mal versuchen die Situation bei einer Uhrmacherlupe durch einen Strahlverlauf deutlich zu machen.

Im Bild 9.13 habe ich den Abbildungsstrahlengang mit einer Lupe skizziert, die sich sehr dicht vor dem Augapfel befindet.

In diesem Beispiel ist die Augenlinse vollkommen entspannt, d.h. auf unendlich adaptiert und das zu betrachtende Objekt A befindet sich in natürlicher Sehweite. Das Bild des Objektes ist in diesen Fall stark verkleinert und fast in der Mitte des Augapfels. Auf der Netzhaut (Rückseite des Augapfels) ist das Bild aber vollkommen unscharf. Um die Abbildung zu verbessern, d.h. die Schärfe auf die Netzhaut zu verschieben, – müsste die Brennweite der Augenlinse weiter verlängert werden, was aber nicht möglich ist, da wir die Augenlinse bereits vollkommen entspannt ist.

Wenn wir den Gegenstand C näher an die Lupe heranrücken, z.B. innerhalb der Brennweite der Lupe (Bild 9.14), dann ergibt sich ein sehr viel größeres und scharfes Bild auf der Netzhaut (roter Pfeil). Die Augenlinse ist nach wie vor im entspannten Zustand; durch eine Anspannung des Ziliarmuskels wäre lediglich eine Verkürzung der Brennweite möglich, was die Abbildung bei dieser Position des Objektes C aber verschlechtern würde.

Die Lupe ist das einfachste aller optischen Instrumente – sie besteht nur aus einer einzelnen Sammellinse.

Bezüglich ihrer Funktion ist sie aber ziemlich kompliziert. Das liegt an den vielen Freiheitsgraden; grundsätzlich gibt es folgende Einstellmöglichkeiten:

1. Position des betrachteten Objektes, relativ zur Lupe;
2. Position der Lupe, relativ zur Augenlinse;
3. Adaption / Brennweite der Augenlinse.

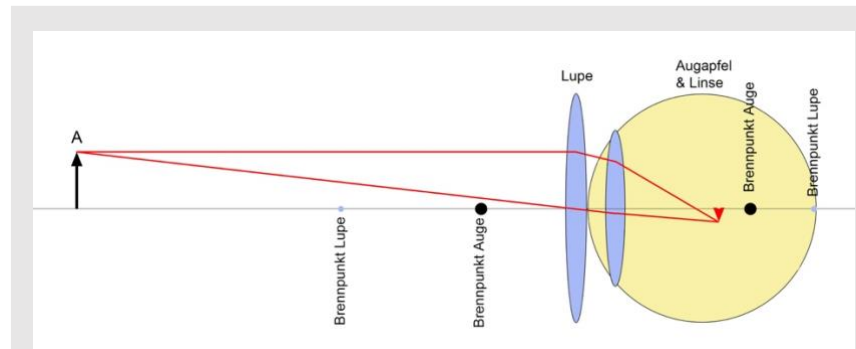


Bild 9.13: Abbildung durch eine Lupe, dicht vor dem Augapfel

- Objekt A in natürlicher Sehweite;
- Augenlinse entspannt – auf unendlich adaptiert;
- Bild sehr klein, nicht auf der Netzhaut.

(Anmerkung: Die Abmessungen und die Brennweiten von Lupe und Auge in der Skizze entsprechen nicht den natürlichen Verhältnissen, die Konstruktion des Strahlverlaufes folgt aber den Regeln der geometrischen Optik.)

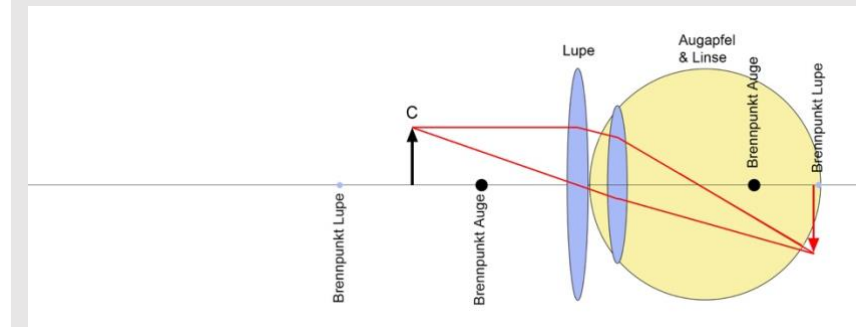


Bild 9.14: Abbildung durch eine Lupe, dicht vor dem Augapfel

- Objekt C innerhalb der Lupenbrennweite;
- Augenlinse entspannt – auf unendlich adaptiert;
- Bild groß, auf der Netzhaut.



Bild 9.15: Uhrmacherlupe

<https://www.benel.de/webshop/lupen/carson-uhrmacherlupe-set-mit-smartphone-adapter.html>

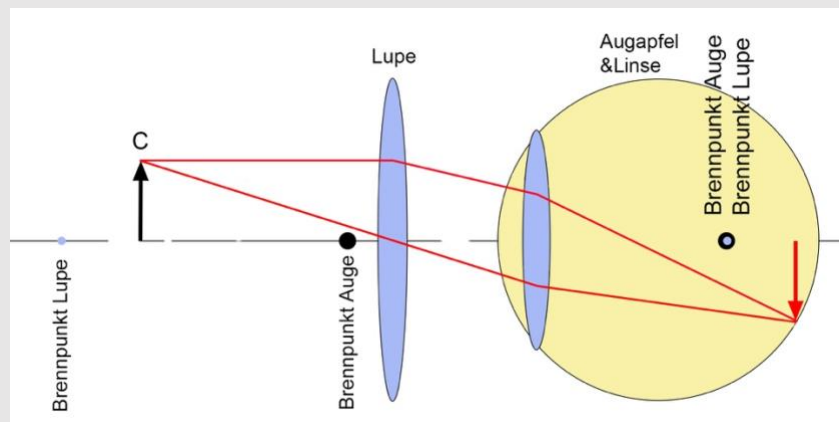


Bild 9.16: Abbildung durch eine Lupe in etwas größerem Abstand von Augapfel.

- Objekt C innerhalb der Lupenbrennweite aber dichter am Brennpunkt;
- Augenlinse entspannt;
- Bild etwas kleiner als im Bild 9.14.

Alle drei Einstellmöglichkeiten werden in der Praxis auch benutzt, - in der Regel unbewusst. Im Fall der Uhrmacherlupe, die vor das Auge geklemmt wird (Bild 9.15) ist eine Variation der Lupenposition allerdings stark eingeschränkt.

Eine leicht veränderte Konfiguration von Lupe und Objektstand (Augenlinse weiterhin entspannt) zeigt Bild 9.16. Die Lupe befindet sich jetzt in einem größeren Abstand zur Augenlinse und das Objekt rückt etwas näher an den Lupenbrennpunkt. Auf der Netzhaut entsteht jetzt ein etwas kleineres Bild des Objektes.

Diese Anordnung führt im Vergleich zu Bild 9.14 zwar zu einer kleineren Vergrößerung, vergrößert aber die Übersicht.

Ein bei für die Benutzung der Lupe sehr wichtiger Parameter ist die Vergrößerung.

Die Definition der Lupenvergrößerung kann in der Regel nur näherungsweise erfolgen – das hängt damit zusammen, dass die Einstellung der Parameter (Position des Objektes, Position der Lupe und die Adaption der Augenlinse) nicht fest vorgeben ist, sondern individuell angepasst wird. Man findet in der Literatur (Internet) deshalb auch nur Näherungen zur Lupenvergrößerung.

Eine nicht unwichtige Frage bezieht sich auf die Art der Vergrößerung die die Lupe liefert - Lateral – oder Winkelvergrößerung? (Kapitel 9.)

Es ist auf den ersten Blick nicht klar, warum nicht einfach die Bildgröße auf der Netzhaut im Verhältnis zur Objektgröße als Lupenvergrößerung definiert ist. Die Antwort ist für viele optische Instrumente gültig (Lupe, Fernrohr, Mikroskop): Als „vergrößert“ wird ein Objekt empfunden, wenn es möglichst dicht an das Auge herangerückt werden kann und das Bild auf der Netzhaut trotzdem noch scharf erscheint.

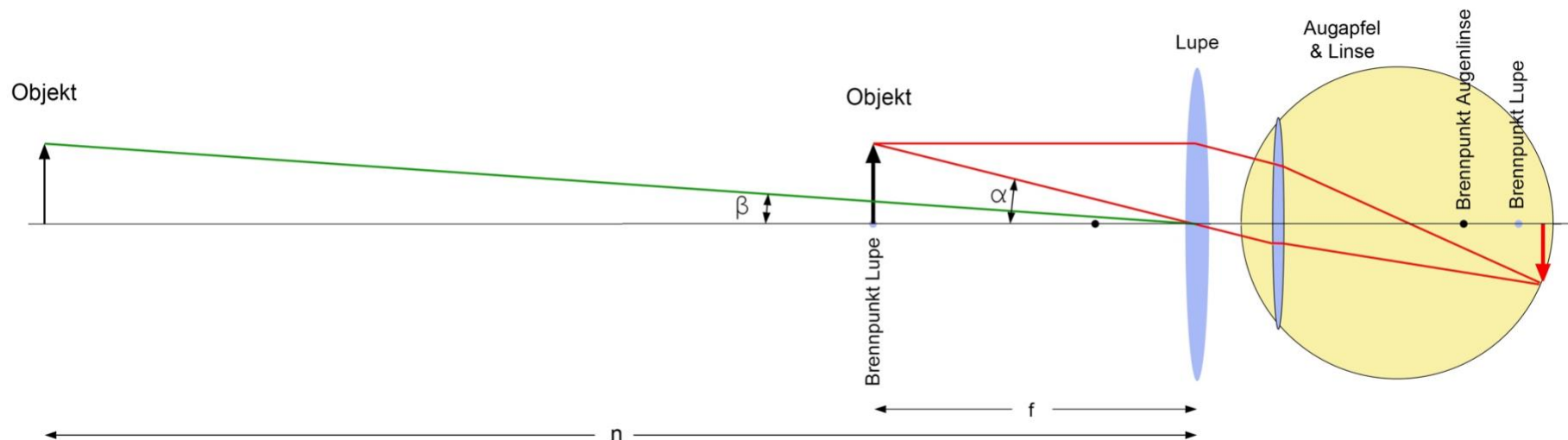


Bild 9.17 Prinzipbild zur Definition der Winkelvergrößerung bei der Lupe:

- Das Objekt befindet sich im Brennpunkt der Lupe. (Abstand f)
- Die Position der Lupe ist so eingestellt, dass das Bild des Objektes auf der Netzhaut scharf erscheint
- Aus der Position der Lupe erscheint das Objekt unter dem Öffnungswinkel α
- In der natürlichen Sehweite n (ca. 25 cm) erscheint das Objekt unter dem Öffnungswinkel β

Die im Bild 9.17 dargestellten Abmessungen entsprechen nicht der realen Situation – sie sind etwas verkleinert. Das Verhältnis der Abmessungen (Brennweiten, Objektabstände) ist jedoch halbwegs realistisch.

Zur Vereinfachung der Rechnung habe ich eine Anordnung gewählt, die auch in der Literatur häufig benutzt wird, - das Objekt befindet sich im Brennpunkt der Lupe und die Augenlinse ist weiterhin entspannt, d.h. auf Unendlich eingestellt.

Der Öffnungswinkel des im Lupenbrennpunkt positionierten Objektes lässt sich berechnen zu:

$$(9.2) \quad \tan \alpha = H / f$$

mit H: Objektgröße, f = Lupenbrennweite (ca 7 cm)

In der natürlichen Sehweite n (ca. 25cm) erscheint das Objekt unter dem Öffnungswinkel:

$$(9.3) \quad \tan \beta = H / n$$

mit H: Objektgröße, n = natürliche Sichtweite

Wenn man nun die Vergrößerung v_{Lupe} als das Verhältnis des Tangens der Öffnungswinkel α und β definiert, dann ergibt sich:

$$(9.4) \quad v_{\text{Lupe}} = \tan \alpha / \tan \beta = n / f$$

Mit den oben angenommenen Beispielwerten für die natürliche Sehweite (n= 25 cm) und der Lupenbrennweite (f= 7 cm) ergibt sich daraus eine Vergrößerung von

$$v_{\text{Lupe}} \approx 3,5$$

Diese Abschätzung für die Vergrößerung einer Lupe ist nur für die entspannte, d.h. auf die natürliche Sehweite eingestellte Augenlinse gültig. Natürlich ist es auch möglich – mit einer gewissen Anstrengung(!) – die Brennweite der Augenlinse weiter zu verkürzen. Das Objekt kann dann weiter an das Auge herangeführt und die Vergrößerung weiter gesteigert werden. Die Formel zur Abschätzung der auf diese Weise erreichbaren Vergrößerung lautet:

$$(9.5) \quad v'_{\text{Lupe}} = (\text{Dioptrien der Lupe} / 4) + 1$$

(s.d.: de.wikipedia.org/wiki/Lupe)

Die Lupe aus unserem Beispiel hat eine Brennweite von 7 cm, das sind 14,3 Dioptrien und daraus ergibt sich für die maximale Vergrößerung (mit adaptierter Augenlinse) ein Wert von

$$v'_{\text{Lupe}} = 4,5$$

Eine Dioptrie ist der Kehrwert der Brennweite in Metern. Also: 7cm sind 0,07 m, der Kehrwert davon ist : $1 / 0,07 = 14,28$ Dioptrien.



Bild 9.20: C. Zeiss, Jena. No. 18.076, 1891

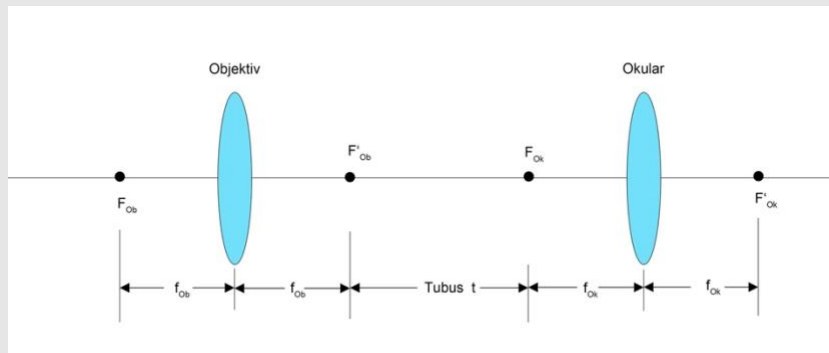
Quelle: <https://www.kambeck.de/index.php/mikroskope-mikroskopes>

Bild 9.21: Grundkomponenten eines Mikroskops: Objektiv und Okular.

9.3 Optische Instrumente - Mikroskop

Das Mikroskop ist sicher eines der wichtigsten optischen Instrumente, zumindest in der Wissenschaft.

Rein vordergründig geht es zunächst wie bei der Lupe um die Vergrößerung kleiner – und sehr kleiner – Objekte; im Gegensatz zur Lupe, bei der das vergrößerte Bild weitgehend von der Handhabung abhängt, ist der optische Aufbau des Mikroskops fest installiert und hat normalerweise ein sehr viel höhere Vergrößerung.

Eine wichtige Komponente am Mikroskop ist die Beleuchtungseinrichtung, die entweder als Durchlicht für transparente Objekte oder als Auflicht für undurchsichtige Objekte eingerichtet sein kann. (Im Bild 9.20 sorgt ein unter dem Objektträger angebrachter Spiegel für die Beleuchtung.) Im Rahmen dieser Broschüre interessiert uns aber nur die Entstehung des vergrößerten Bildes.

Ok, wir fangen vorne an:

Im Bild 9.21 sind die wesentlichen Komponenten eines Mikroskops dargestellt: Wir finden ein Objektiv und ein Okular.

Im Betrieb wird das zu vergrößernde Objekt außerhalb der Brennweite des Objektivs platziert. Der Abstand zwischen Objektiv und Okular ergibt sich aus den Brennweiten der beiden Optiken F_{Ob} und F_{Ok} und dem Abstand zwischen den beiden Brennpunkten, der sog. Tubuslänge t .

Bild 9.22 zeigt die erste Stufe der Bildentstehung im Mikroskop: die Abbildung durch das Objektiv:

das Objekt wird etwas außerhalb der Objektivbrennweite positioniert. Das Okular dient als Lupe zur Betrachtung des Zwischenbildes und wir können hier die Überlegungen, die wir zur Lupe angestellt haben direkt übernehmen. (Kapitel 9.2, Bild 9.17)

Zur Vereinfachung der weiteren Rechnung habe ich – genauso wie bei der Lupe - den Spezialfall angenommen, dass das Zwischenbild im Brennpunkt des Okulars entsteht. Aus dem Bild 9.22 ist direkt ablesbar:

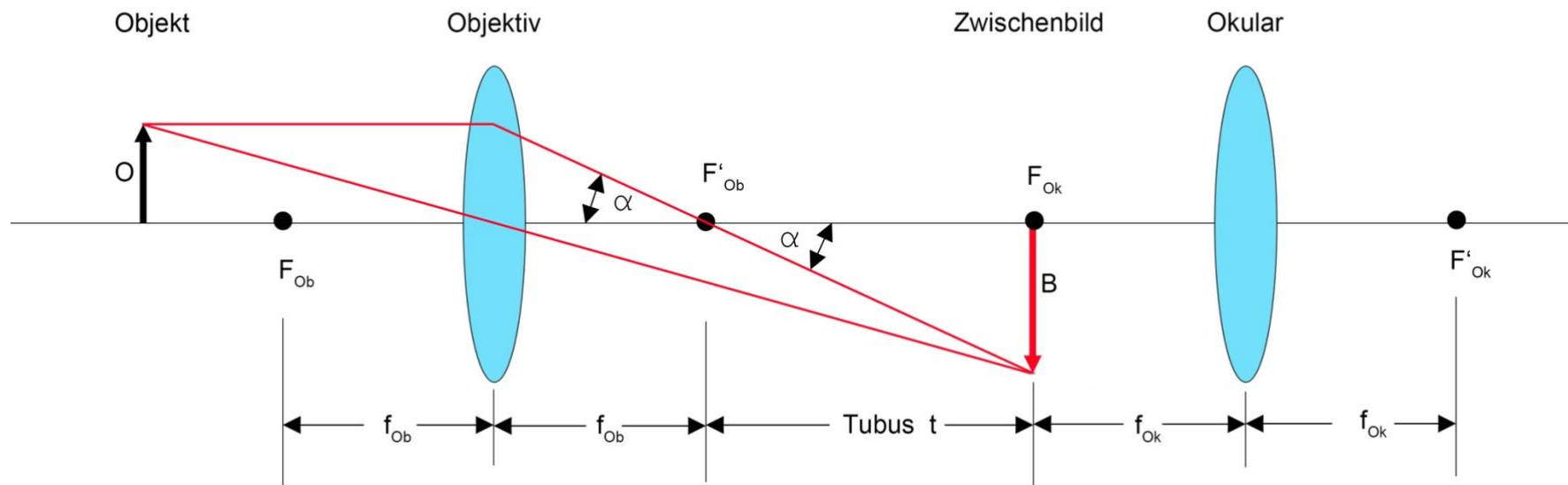


Bild 9.22: Abbildungsstrahlengang durch ein Mikroskopobjektiv.

$$(9.6) \quad \tan \alpha = B / t = O / f_{Ob}$$

Für die Vergrößerung des Zwischenbildes v_B ergibt sich daraus:

$$(9.7) \quad v_B = B / O = t / f_{Ob}$$

d.h. je kleiner die Objektivbrennweite und je größer die Tubuslänge, um so größer ist das Zwischenbild.

Im nächsten Schritt wollen wir den Strahlengang durch das Okular fortführen. (S.d. das Bild 9.23.) Im Normalfall werden Objektiv und Okular so positioniert, dass das Zwischenbild innerhalb der Brennweite oder direkt im Brennpunkt des Okulars entsteht, so wie im Bild 9.23 dargestellt. Das Okular übernimmt dann die Rolle einer Lupe, bei der sich das Zwischenbild ebenfalls innerhalb der Brennweite oder direkt auf dem Brennpunkt befindet.

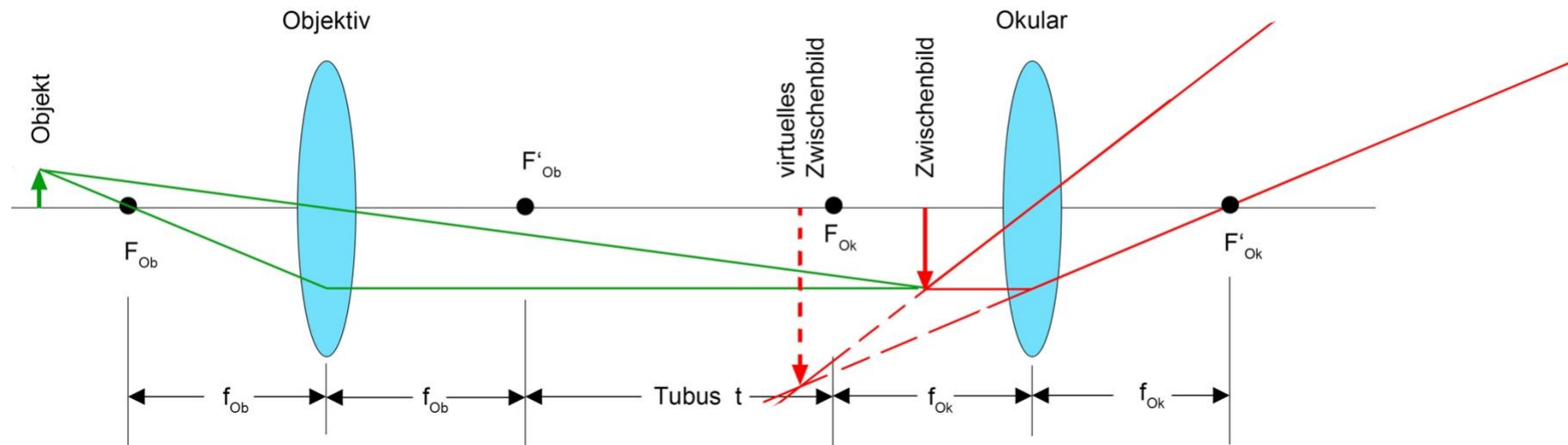


Bild 9.23: In diesem Beispiel entsteht das Zwischenbild innerhalb der Brennweite des Okulars.

Für die Berechnung der Okularvergrößerung ist diese Konfiguration etwas unpraktisch, wir werden deshalb die Objektposition so verschieben, dass das Zwischenbild exakt im Brennpunkt des Okulars entsteht. (Bild 9.22 und Bild 9.24)

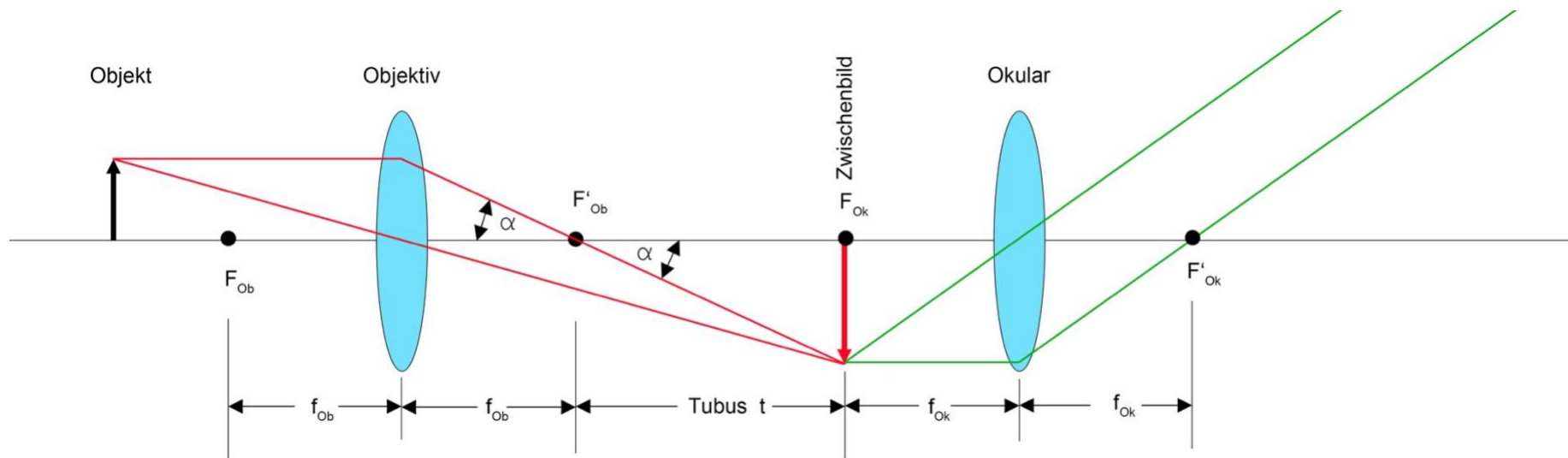


Bild 9.24 Mikroskopstrahlengang – Zwischenbild im Okularbrennpunkt

Für diesen Fall können wir für die Berechnung der Okularvergrößerung direkt die Gleichung (9.4) für die Lupenvergrößerung übernehmen:

$$(9.8) \quad v_{Ok} = n \cdot f_{Ok}$$

Die Gesamtvergrößerung des Mikroskops v_M ergibt sich aus dem Produkt von Objektivvergrößerung v_{Ob} und Okularvergrößerung v_{Ok} :

$$(9.9) \quad v_M = v_{Ob} \cdot v_{Ok} = (t \cdot n) / (f_{Ob} \cdot f_{Ok})$$

mit:

v_M, v_{Ob} und v_{Ok}	Vergrößerung des Mikroskops, des Objektivs und des Okulars
t :	Tubuslänge des Mikroskops (Abstand zwischen den Brennpunkten von Objektiv und Okular)
n :	natürliche Sehweite des Auges (25cm bei entspannter Linse)
f_{Ob} und f_{Ok}	Brennweiten von Objektiv und Okular

Wenn wir mal die „Mikroskopdaten“ aus den obigen Skizzen zu Grunde legen (Brennweiten 3cm, Tubuslänge ca. 4,5 cm natürliche Sehweite 25cm, dann hat unser „virtuelles Mikroskop“ eine Vergrößerung von 12,5.

Typische Daten für ein „Standartmikroskop“ wären: Brennweite Objektiv: 1cm; Brennweite Okular: 2cm; Tubuslänge 16cm; natürliche Sehweite 25 cm ergibt eine Gesamtvergrößerung von 200!

Einen Punkt sollten wir an dieser Stelle noch betonen: Welche Art von Vergrößerung erzeugt eigentlich das Mikroskop? Lateral- oder Winkelvergrößerung. Der Diaprojektor liefert z.B. eindeutig eine Maßstabvergrößerung (kleines Dia auf einer großen Leinwand) während Lupe und Fernrohr über die Vergrößerung des Sehwinkels funktionieren. Das Mikroskop benutzt beide Vergrößerungstypen: Das Objektiv erzeugt eine Maßstabsvergrößerung im Zwischenbild und das Okular funktioniert ähnlich wie eine Lupe über eine Winkelvergrößerung.

Bei vielen (den meisten?) Darstellungen eines Mikroskopstrahlenganges wird darauf verzichtet den Strahlverlauf bis ins Auge des Beobachters fortzusetzen. Für die Herleitung der Geräteeigenschaften ist das in den meisten Fällen auch nicht nötig. So wird der Leser häufig mit der Feststellung abgespeist, das Lupe und Mikroskop ein virtuelles Bild erzeugen und eine bestimmte Vergrößerung aufweisen. Das am Ende des Strahlenganges ein **reelles Bild** auf der Netzhaut des Beobachters ankommen muss, scheint keine Erwähnung wert zu sein. (In einigen Fällen findet man sogar die Formulierung vom „virtuellen Bild im Auge des Beobachters“.)

Deshalb hier zum Abschluss diese Kapitels - zumindest schematisch – der Versuch das Auge mit einzubeziehen:

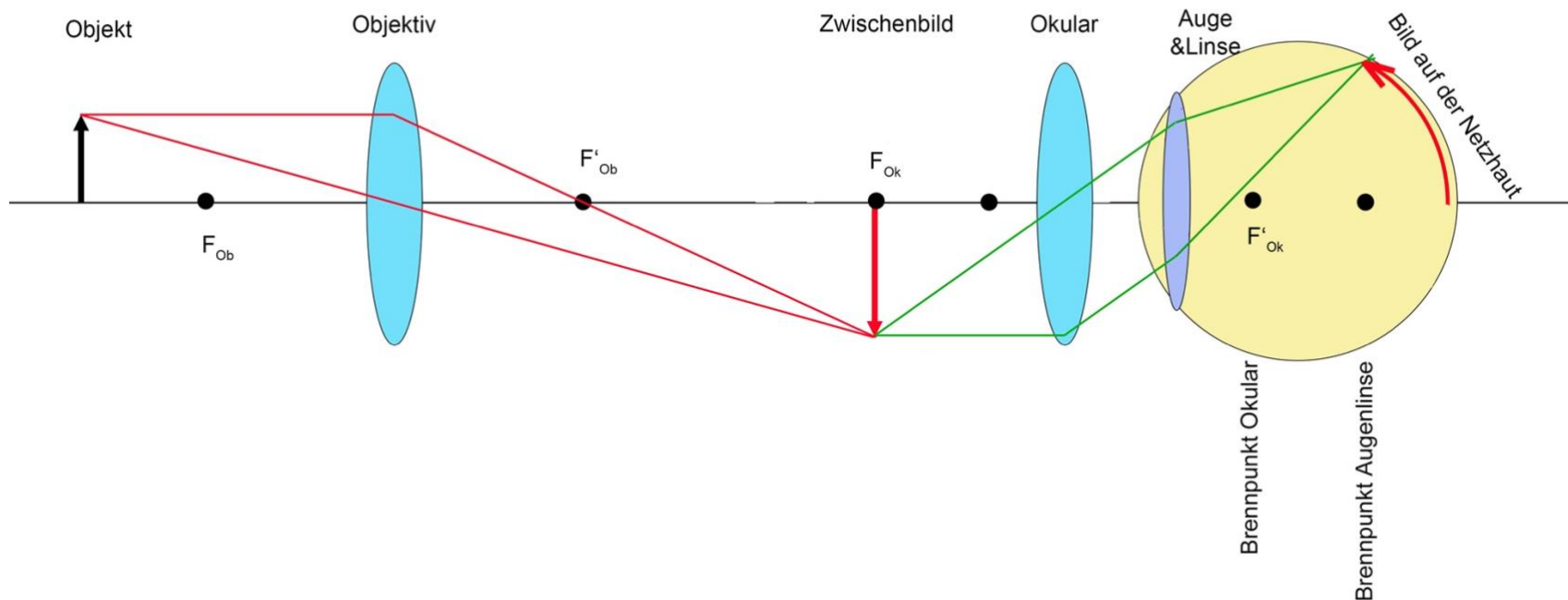


Bild 9.25: Versuch der Darstellung eines vollständigen Mikroskopstrahlenganges

In vielen Lehrbüchern wird die Blende überhaupt nicht erwähnt: Manchmal findet man eine Fußnote, einige investieren sogar ein kurzes Kapitel. Aber immer hat man den Eindruck, dass den Autoren das Thema eher lästig ist. So ein **"Loch im Karton"** ist im Vergleich zu der schönen, glänzenden Linse doch nicht viel mehr als die arme Verwandte, die zwar auch zur Familie gehört, die man aber besser im Hinterzimmer versteckt - eine gewaltige Fehleinschätzung!

Wenn Sie sich vor Augen halten, dass eines der frühesten optischen Abbildungsgeräte - die Lochkamera, oder Camera Obscura - überhaupt ohne Linsen, nur mit einer Blende ausgekommen ist, dann erscheint die Vernachlässigung des Themas "Blende" in der technischen Literatur eigentlich vollkommen unverständlich.

(Tut mir leid, der Rückgriff auf die Lochkamera ist an dieser Stelle unpassend, denn die Abbildungseigenschaften eines "Loches" gehören nicht mehr zum Gebiet der geometrischen Optik, sondern zur Wellenoptik, aber ich konnte es mir nicht verkneifen das berühmteste "Loch im Karton" wenigstens kurz zu erwähnen.)

10. Blenden - Einführung

Blenden? - Nur ein Loch im Karton!

Wodurch zeichnet sich ein gutes optisches Gerät aus?

Das lässt sich so pauschal kaum beantworten und hängt stark vom jeweiligen Verwendungszweck ab, - aber ein paar grundsätzliche Kriterien existieren doch:

Da gibt es z.B. den Wunsch nach einer möglichst großen und gleichmäßigen Bildhelligkeit; oder ein möglichst großes Gesichtsfeld - und beides hängt vom richtigen Umgang mit den Blenden ab!

Na ja, es gibt natürlich auch noch andere Eigenschaften, die ein "gutes" optisches Gerät haben sollte: hohe Auflösung, geringe Verzeichnung, geringe Farbfehler, ... noch was?

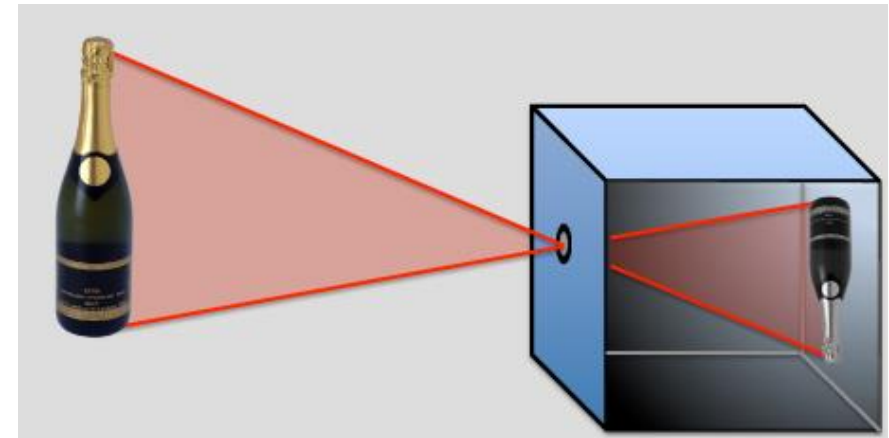


Bild 10.1: Lochkamera

Was ist z.B. ein Fotoapparat wert, der nur bei hellem Sonnenschein verwendet werden kann? (Stichwort: Bildhelligkeit, bzw. Lichtstärke des Objektivs.)

Oder ein Fernrohr, das zwar ausreichend vergrößert und vielleicht auch über eine ausreichende Lichtstärke verfügt, dessen Gesichtsfeld aber so klein ist, dass Sie den Eindruck haben, durch einen Gartenschlauch zu schauen. (Stichwort Gesichtsfeld)

Bildhelligkeit und **Gesichtsfeld** werden von Blenden beeinflusst.

Im einfachsten Fall kann die Linsenfassung oder der Rand eines Bildschirms die Rolle der "Blende" übernehmen.

Im folgenden Bild ist das wohl bekannteste Beispiel für die Wirkung von "Blenden" dargestellt - das **Schlüsselloch**.

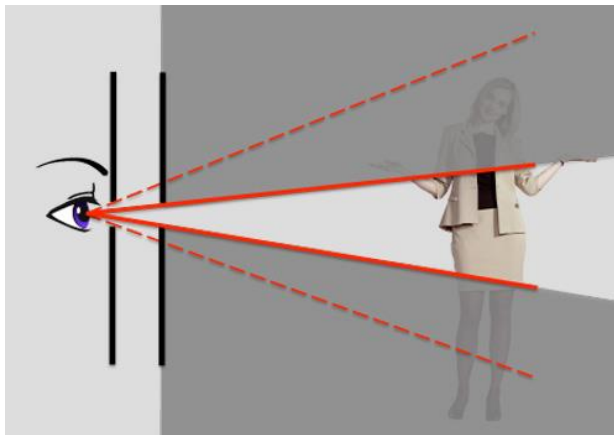


Bild 10.2: Blick durch ein Schlüsselloch.

Die Tatsache, dass ein Karton mit einem Loch - also eine "Blende" - den man in unterschiedlicher Entfernung vor das Auge hält, die freie Sicht - das "Gesichtsfeld" - mehr oder weniger einschränkt, ist trivial.

Wenn z.B. die beiden Blenden im obigen Bild ganz dicht an das Auge herangezogen werden, dann lässt sich das Gesichtsfeld fast beliebig groß machen. Wenn man sie voneinander entfernt, dann schrumpft es sehr schnell zusammen und Sie sehen von der Dame nur noch die Gürtelschnalle.

Schlüssellocheffekt: Zwei Lochblenden in einem gewissen Abstand beeinflussen das Gesichtsfeld ganz erheblich.

Die Sache mit dem Schlüsseloch ist ja leicht zu verstehen. Wenn aber neben den Blenden aber auch noch Linsen ins Spiel kommen, wird die Angelegenheit etwas unübersichtlicher- aber dazu später mehr.

Wir werden uns in den folgenden Kapiteln also mit Blenden beschäftigen, die die Bildhelligkeit und das Gesichtsfeld eines optischen Gerätes beeinflussen. Dieses Thema wäre eigentlich keiner Rede wert, - Motto: machen wir das "Loch im Karton" doch so groß wie möglich - wenn da nicht die Linsen wären, aus denen ein optisches Gerät ja nun auch noch besteht.

Um Ihr Problembewusstsein gleich 'mal etwas anzustacheln, hier eine Frage: - vom Objekt (Kerze) aus gesehen befindet sich **hinter** der abbildenden Linse eine Blende, die kleiner ist als der Linsendurchmesser. Wie wirkt sich diese Blende nun auf den Öffnungswinkel des Lichtkegels **vor** der Blende aus?

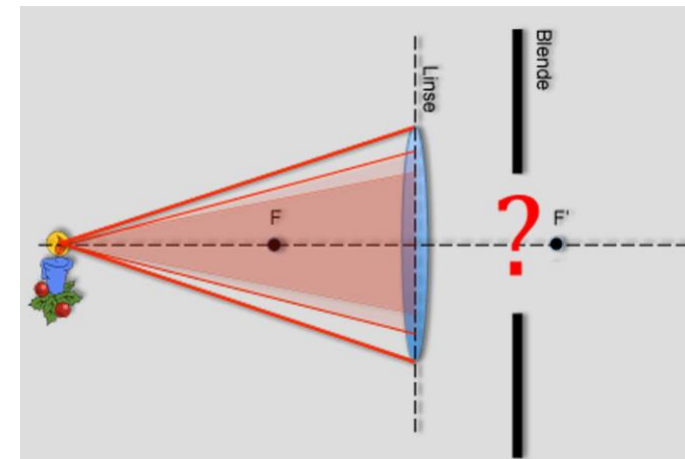


Bild 10.3: Blende hinter einer Linse. Wie wirkt sich das auf die Bildhelligkeit aus?

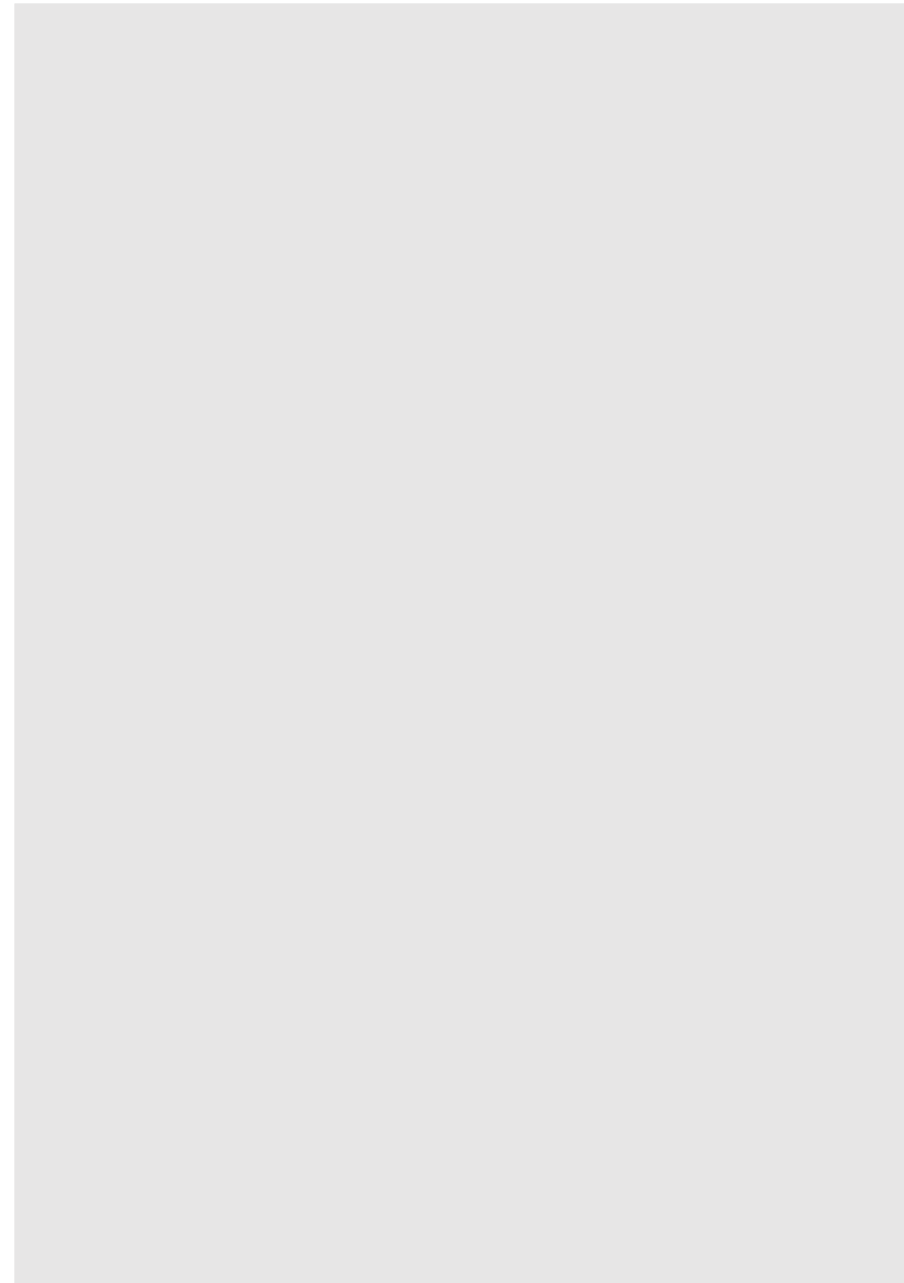
Na, was meinen Sie? Welcher der drei Strahlenkegel auf Bild 10.3 passt auf der rechten Seite durch die Blende?

Klar, Sie könnten jetzt die Strahlverläufe mit Ihrem Wissen aus Kapitel 8 konstruieren, dann wird sich schon zeigen, welcher der drei Strahlenkegel durch die Blende passt, - aber das geht auch eleganter!

Sie werden sagen: Das Problem interessiert mich nicht – ich lasse die Blende einfach weg, hat für die Abbildung ohnehin keine Funktion.

Das ist natürlich ein Irrtum: Bei Fotoapparaten hat eine Blende eine ganz wichtige Funktion, z.B. die Steuerung der Bildhelligkeit. Im Übrigen aber kann in einem Linsensystem die Halterung einer weiteren Linse die Rolle einer helligkeitsbestimmenden Blende übernehmen. (Wir werden das im nächsten Kapitel ausführlich untersuchen.)

..... und noch etwas: bei der folgenden Betrachtung zum Einfluss von Blenden auf die Abbildungseigenschaften kommen wir (fast) ohne Mathematik aus! Na, ist das ein Versprechen?



Aus urheberrechtlichen Gründen sei darauf hingewiesen, dass die Clipart der Kerze im Bild rechts von der Seite www.bilderkiste.de stammt.

10.1 Einfluss der Blenden auf die Bildhelligkeit

Die Aperturblende und die Eintrittspupille.

Wie wirkt sich eine Blende, oder eine Linsenfassung auf die Helligkeit des Bildes aus?

Im folgenden Bild ist die Grundidee skizziert: Jede - na ja, fast jede - Lichtquelle strahlt in den gesamten Raum.

Um die gesamte von einer Lichtquelle abgegebene Strahlungsenergie 'einfangen' zu können, müsste sie vom 'abbildenden' System vollständig umgeben sein. Die Linse hat aber nur einen begrenzten Durchmesser und kann deshalb auch nur einen Teil der kugelförmig abgestrahlten Lichtenergie auf den Bildpunkt fokussieren.

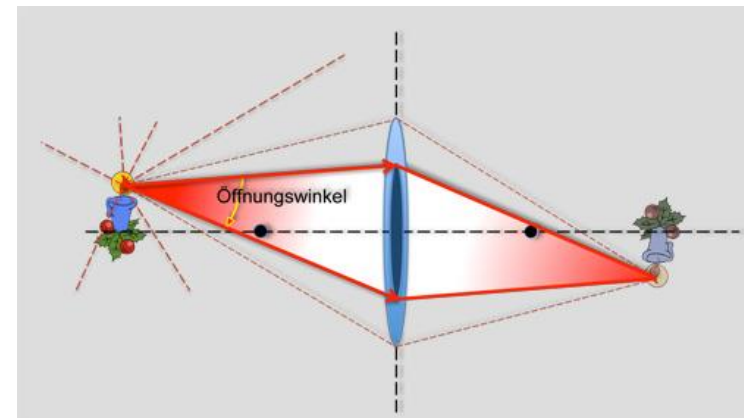


Bild 10.4: Apertur- oder Öffnungsblende.

Selbstverständlich wird das Bild um so heller, je größer der Linsendurchmesser ist, d.h. je mehr sie von der Strahlungsenergie "einfangen" kann. Aber große Linsen sind nicht nur teuer, - wir entfernen uns mit größer werdendem Linsendurchmesser auch immer mehr von der Voraussetzung, dass nur paraxiale, d.h.

achsennahe, Strahlen zu einer sauberen Abbildung beitragen können, d.h., die Abbildungsfehler werden immer deutlicher.

Die Blende die die Bildhelligkeit, also den Öffnungswinkel des eintretenden Lichtkegels bestimmt, nennt man **Apertur- oder Öffnungsblende**! Im obigen Bild ist die Linse bzw. die Linsenfassung selbst Aperturblende.

So weit, so gut! Aber ein optisches System besteht selten nur aus einer einzigen Linse bzw. einer einzigen Blende. Betrachten Sie bitte die im nächsten Bild gezeigte Prinzipskizze eines ganz einfachen Fotoapparates. In diesem Fotoapparat befindet sich - vom Objekt, der Katze, aus gesehen - eine Blende hinter der abbildenden Linse.

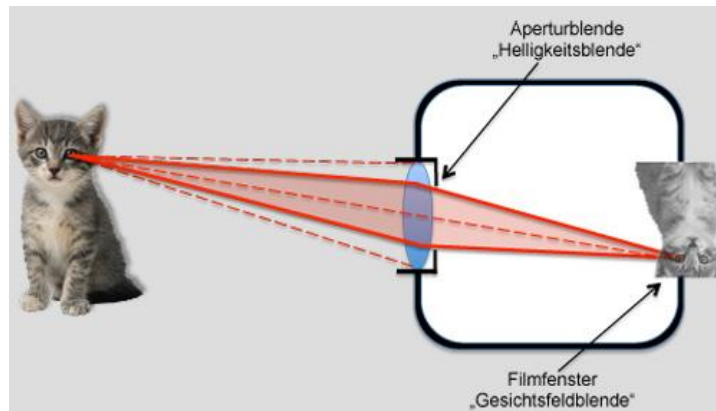


Bild 10.5: Prinzipskizze eines einfachen Fotoapparates mit Aperturblende.

Die **Aperturblende**, d.h. die helligkeitsbestimmende Blende, ist im obigen Beispiel dicht hinter, bzw. im Objektiv montiert. Es ist leicht zu erkennen, dass nicht der Durchmesser der Linse, sondern die Blende dahinter den Öffnungswinkel des einfallenden Strahlenbündels begrenzt.

Kennen Sie noch die AGFA-Box? Da war die "Blende" ein gelochter Blechstreifen!



Bild 10.6: Kamera AGFA-Box.

In der Skizze ist eine Linse (hellblau), ihre beide Brennpunkte F und F' sowie eine Loch- bzw. Aperturblende (schwarz) dargestellt.

Da sich die Aperturblende sehr dicht an der Linse befindet - innerhalb der Brennweite - ist die Konstruktion des Bildes etwas ungewohnt:

Zunächst wird von der oberen Blendenkante ein Parallelstrahl (1) zur optischen Achse gezeichnet, der von der Linse zum Brennpunkt F abgelenkt wird (2). Der zweite von dieser Blendenkante startende Strahl ist der Zentralstrahl (3), der durch den Mittelpunkt der (dünnen) Linse unbeeinflusst hindurchlaufen kann. Der Schnittpunkt von Strahl 2 und Strahl 3 ergibt den Bildpunkt der Blendenkante, - aber wie man sehr leicht erkennen kann, laufen diese Strahlen auseinander, einen Schnittpunkt gibt es nur in der rückwärtigen Verlängerung zwischen den Strahlen $2'$ und $3'$. Man erhält also ein vergrößertes 'virtuelles Bild' der Blende. (Eine detaillierte Beschreibung wie man eine Abbildung durch eine dünne Linse konstruiert finden Sie im Kapitel 8.)

Aber, wie groß ist nun der Öffnungswinkel des einfallenden Lichtkegels?

Um das herauszufinden, könnten Sie natürlich viele verschiedene Abbildungsstrahlengänge konstruieren und damit solange fortfahren, bis Sie den Öffnungswinkel des einfallenden Strahlenbündels gefunden haben, der auf der Ausgangsseite gerade noch durch die Aperturblende passt.

Das kann ziemlich mühsam werden, aber sie ahnen es sicher schon, - es gibt ein recht elegantes Verfahren die Öffnung des einfallenden Lichtkegels zu finden - sie müssen sich auf die Suche nach den sogenannten **Pupillen** des Systems machen: die **Eintrittspupille** bestimmt nämlich den Öffnungswinkel des einfallenden Strahlenbündels, - die **Austrittspupille** den Öffnungswinkel des austretenden.

Die Pupille ist oftmals keine reale Linsenfassung oder Blendenöffnung, sondern das Bild der (realen) Aperturblende. Im folgenden Bild ist die Konstruktion einer solchen "Eintrittspupille" dargestellt:

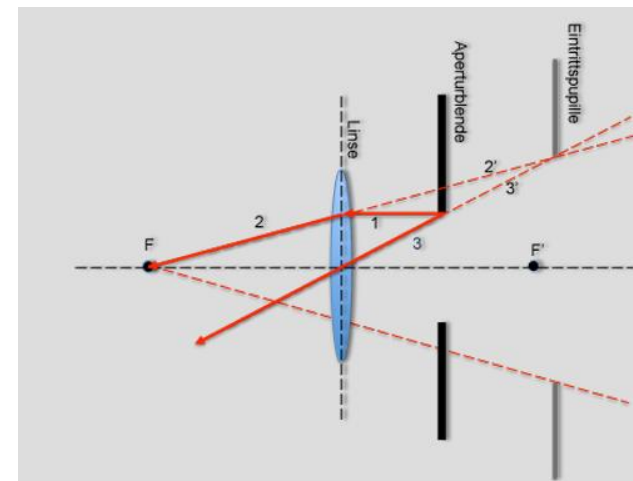


Bild 10.7: Konstruktion der Eintrittspupille.

Das virtuelle Bild der Blende ist die sog. **Eintrittspupille** - und tatsächlich können Sie jetzt direkt das vom Objekt in die Optik eintretende Strahlenbündel mit dem richtigen Öffnungswinkel zeichnen, so wie das im nächsten Bild gezeigt ist:

Dazu zeichnen Sie ausgehend von einem Objektpunkt (in diesem Fall dem Zentrum der Kerzenflamme) einen Strahlenkegel der von der Eintrittspupille begrenzt ist; wenn Sie alles richtig gemacht haben, dann verläuft der Strahlenkegel auf der Bildseite tatsächlich exakt durch die reale Aperturblende

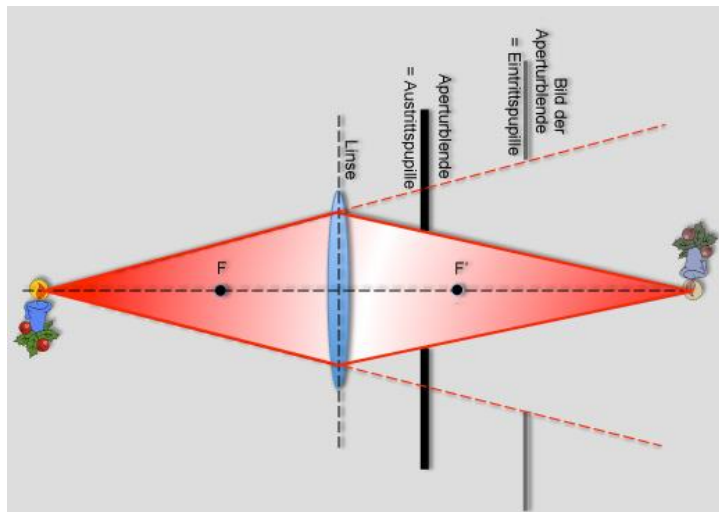


Bild 10.8: Strahlverlauf durch eine Linse und Aperturblende mit Hilfe der „Eintrittspupille“.

Ganz ähnlich ist die Situation, wenn die Anordnung von Blende und Linse umgekehrt ist, d.h. die Blende sich vor der Linse befindet.

In den folgenden Skizzen sind zwei Fälle dargestellt. In beiden Fällen wirkt die Aperturblende als Helligkeitsbestimmende Blende und das Bild der Aperturblende (einmal real und einmal virtuell) definiert den Öffnungswinkel des austretenden Strahlenkegels. (Austrittspupille)

Ausgehend von einem Objektpunkt zeichnen Sie einen Strahlenkegel, der durch die Eintrittspupille hinter der Linse begrenzt wird. Der Öffnungswinkel des austretenden Strahlenkegels wird mit Hilfe der Austrittspupille, die in diesem Fall mit der Aperturblende identisch ist, bestimmt.

1. Die erste Skizze zeigt die Situation, wenn sich die Blende vor der Linse in einem Abstand größer als die Brennweite befindet. In diesem Fall wirkt die Aperturblende direkt als helligkeitsbestimmende Blende. (Eintrittspupille)
Das reale Bild der Aperturblende bestimmt den Öffnungswinkel des austretenden Strahlenbündels. (Austrittspupille)

2. In der zweiten Skizze befindet sich die Aperturblende innerhalb der Brennweite der Linse. Auch hier bestimmt die Aperturblende den Öffnungswinkel des einfallenden Strahlenbündels, wirkt also als helligkeitsbestimmende Blende (Eintrittspupille), die Öffnung des austretenden Strahlenbündels wird jetzt aber vom virtuellen Bild der Blende festgelegt. (Austrittspupille)

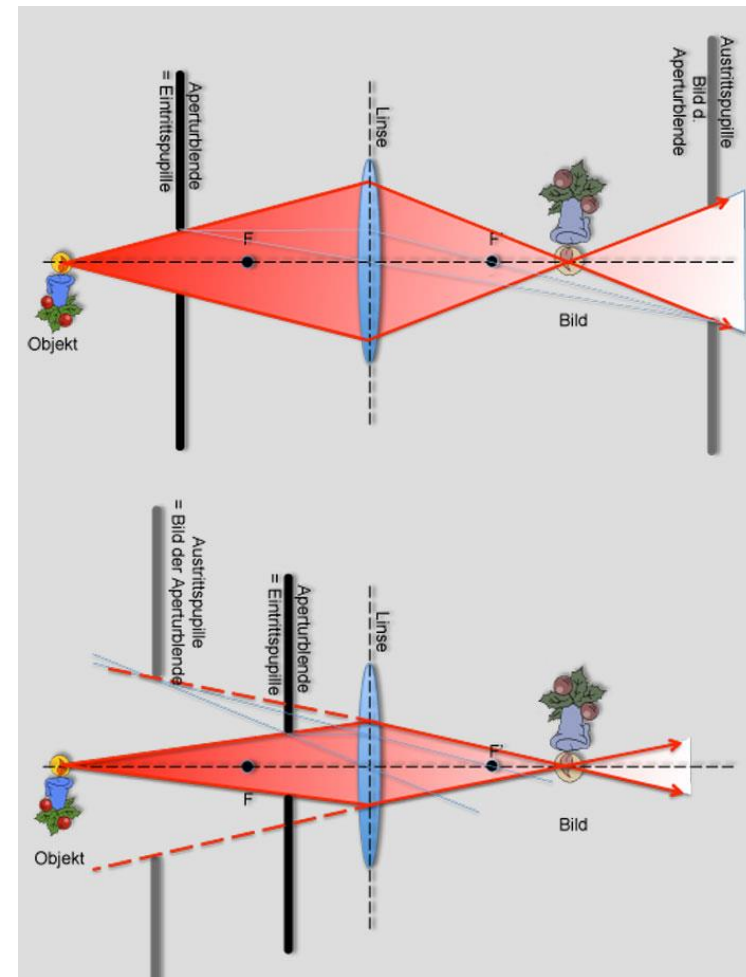


Bild 10.9: Konstruktion der Strahlenkegel für zwei Positionen der Aperturblende

Hat diese Geschichte mit den Pupillen eigentlich auch eine praktische Bedeutung für den Benutzer?

Ja, z.B. bei der Definition der Lichtstärke eines Objektivs:

Die **Lichtstärke** eines Objektivs, oder das **Öffnungsverhältnis** wird durch das Verhältnis D/f :

Durchmesser der Eintrittspupille D / Brennweite f

charakterisiert. Das Inverse dieses Wertes (f/D) ist die sog.

Blendenzahl. D.h. ein Objektiv mit einem Pupillendurchmesser von 25mm und einer Brennweite von 50mm hat ein Öffnungsverhältnis von 1:2 und eine Blendenzahl von 2.

Oder ein anderes Beispiel, - das Fernglas:

Neben den verschiedenen Blenden eines optischen Systems gibt es auch noch die Blende des menschlichen Auges. Nun ist es relativ sinnlos, ein lichtstarkes Fernglas mit großen Eintritts- und Austrittspupillen zu konstruieren, wenn die Helligkeit des Gesamtsystems von der Augenpupille des Benutzers abhängt. Bei einem Fernrohr sollte deshalb die Austrittspupille des Systems und die Pupille des Auges in Position und Größe in etwa übereinstimmen.

Ein Beispiel: Bei einem Nachtglas ist der Durchmesser der Austrittspupille etwa 8mm. Das entspricht ungefähr dem Durchmesser der Augenpupille im Dunkeln. Bei Tag kann sich die Augenpupille aber bis auf 2mm verkleinern, d.h., die große Bildhelligkeit des Nachtglases wird tagsüber gar nicht ausgenutzt. Ein Fernrohr mit einer Austrittspupille von 2-3mm würde für diesen Verwendungszweck vollkommen ausreichen.

Schritt für Schritt-Anleitung zum Auffinden der "Pupillen" in einem Linsensystem:

Als Beispiel untersuchen wir ein System aus zwei Linsen (Linse 1 und Linse 2) und einer Blende. (Bild 10.10)

Blendenzahl bzw. Lichtstärke eines Objektivs

Achtung: Bei der Charakterisierung der Lichtstärke eines Objektivs ist nur die Eintrittspupille und nicht etwa der Durchmesser der Frontlinse von Bedeutung!

Und wie findet man nun in einem System aus Linsen, Linsenfassungen und Blenden die helligkeitsbestimmende Blende, - die **Eintrittspupille** ? Hier als Beispiel eine Anordnung von zwei Linsen und einer (Apertur)Blende:

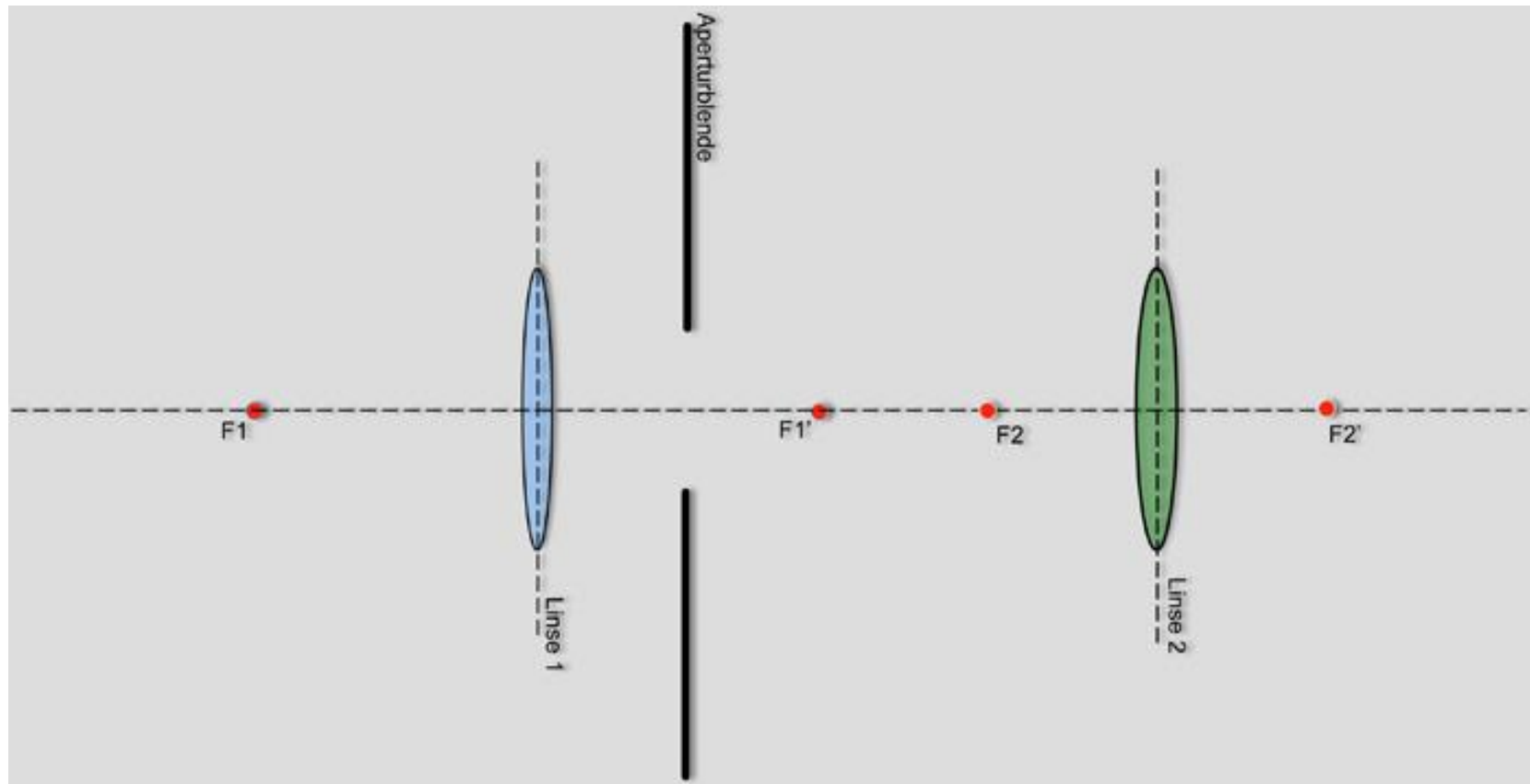


Bild 10.10: Beispielsystem (zwei Linsen und eine Blende) zur Konstruktion der Pupillen.

Im ersten Schritt konstruieren wir – (Bild 10.11)

1. das (virtuelle) Bild der Aperturblende durch Linse 1 (hellblau)
2. das Bild der Fassung von Linse 2 ebenfalls durch Linse 1 (grün gestrichelt, am linken Bildrand)
3. das Bild der Aperturblende durch Linse 2 (grün, am rechten Bildrand)

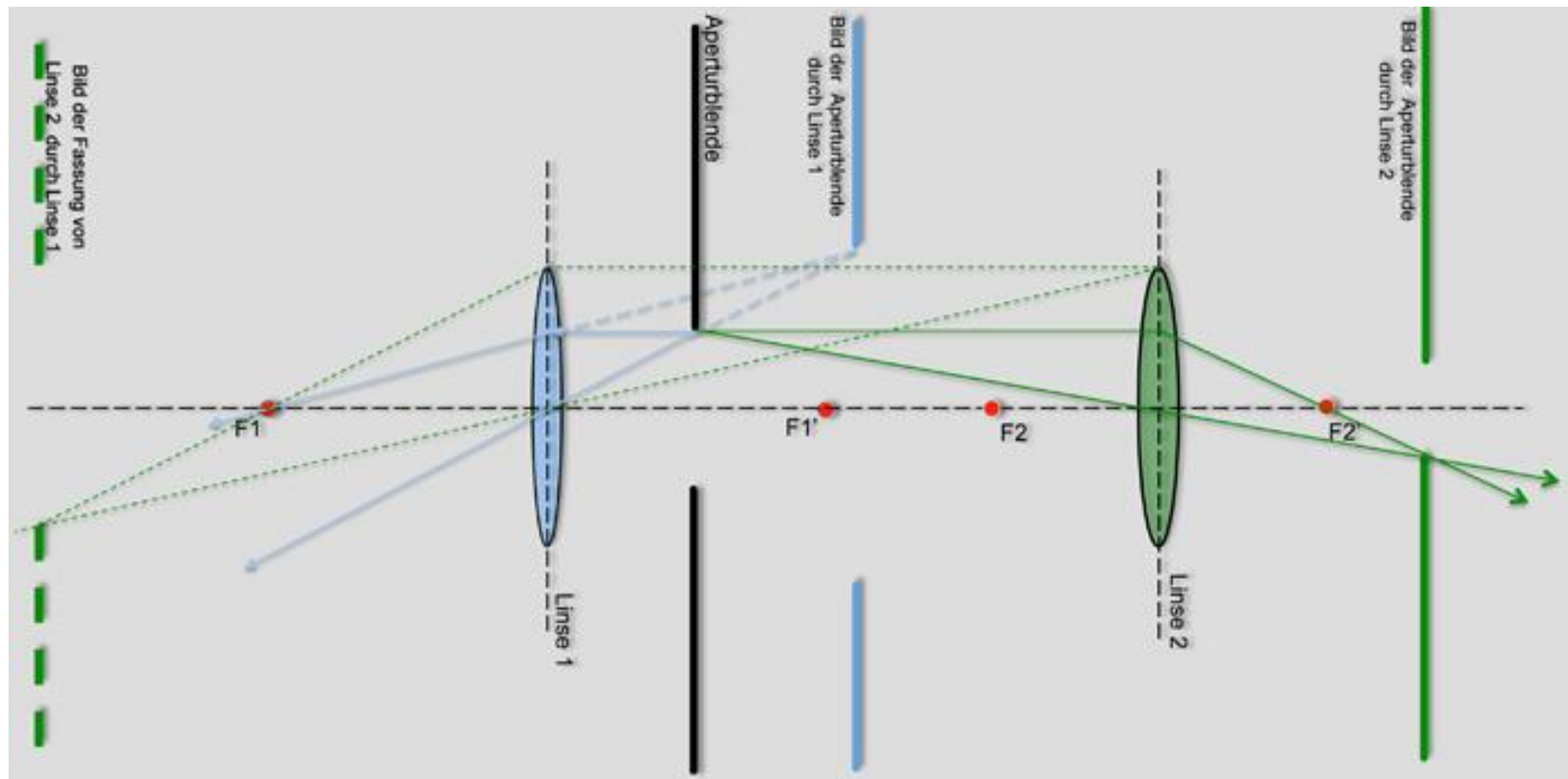


Bild 10.11: Konstruktion der Bilder der Aperturblende (Pupillen). Eine detaillierte Beschreibung wie man eine Abbildung durch eine dünne Linse konstruiert finden Sie im Kapitel 8.

Das Ergebnis sieht vielleicht etwas verwirrend aus, aber wir haben jetzt sämtliche Elemente zusammen, um einen vollständigen Abbildungsstrahlengang inklusive der zugehörigen Öffnungswinkel zu konstruieren.

Um die Sache etwas übersichtlicher zu gestalten, hier noch einmal das Linsensystem und die zugehörigen Pupillen ohne die Konstruktionslinien

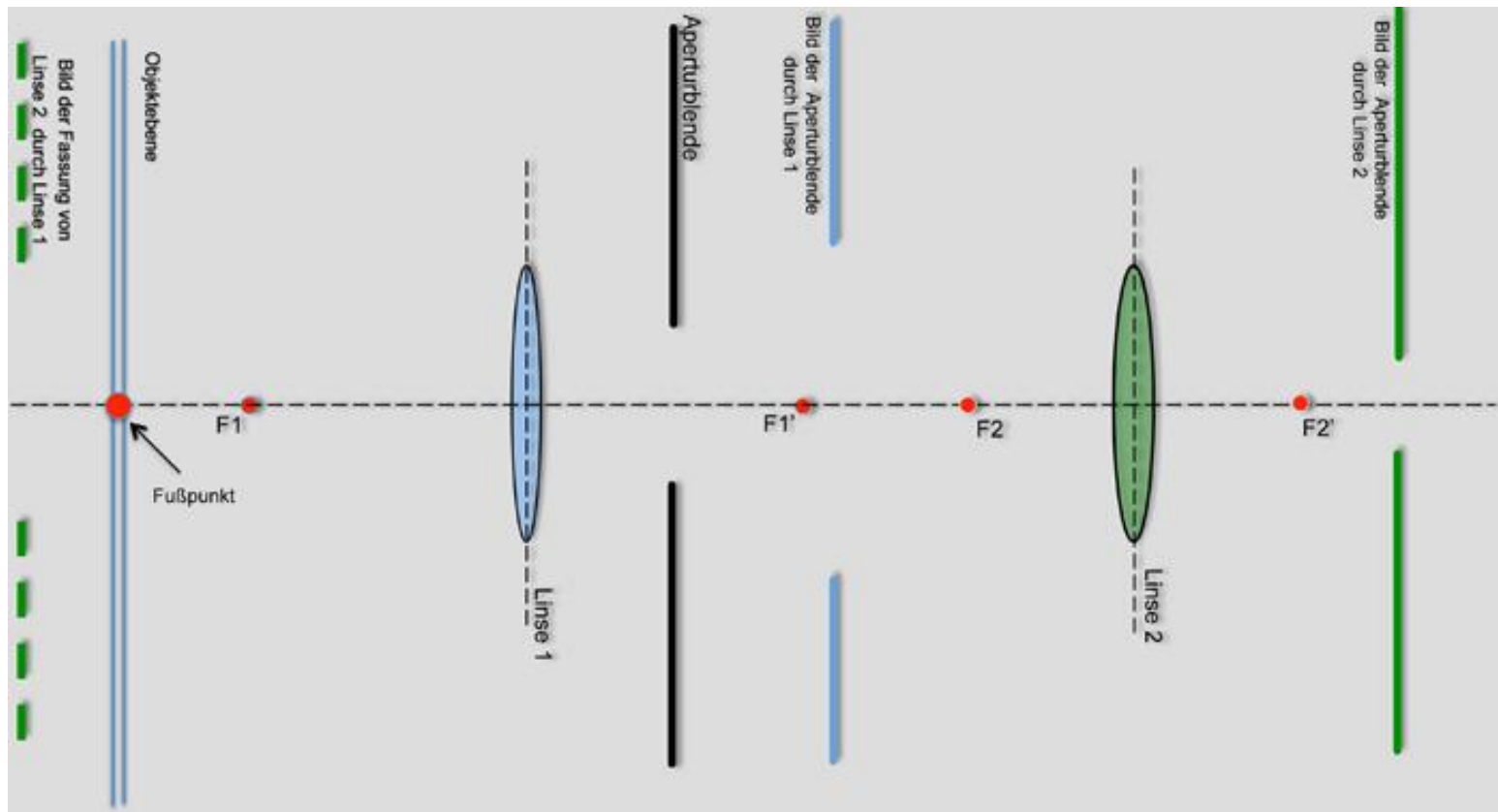


Bild 10.12: Linsensystem mit sämtlichen Bildern der Aperturblende (Pupillen)

In der obigen Skizze habe ich jetzt auch noch die Position eingezeichnet, in der sich das abzubildende Objekt befindet. (Objektebene – blaue Doppellinie)

Preisfrage: Welches ist nun die helligkeitsbestimmende Blende, also die Eintrittspupille?

Um das herauszufinden begeben wir uns an den Fußpunkt des abzubildenden Objektes und ermitteln, welche Blende, - oder Blendenbild !- aus dieser Position unter dem kleinsten Öffnungswinkel erscheint.

Also los: (Bild 10.13). Bitte immer dran denken: Linsenfassungen wirken ebenfalls als Blenden!

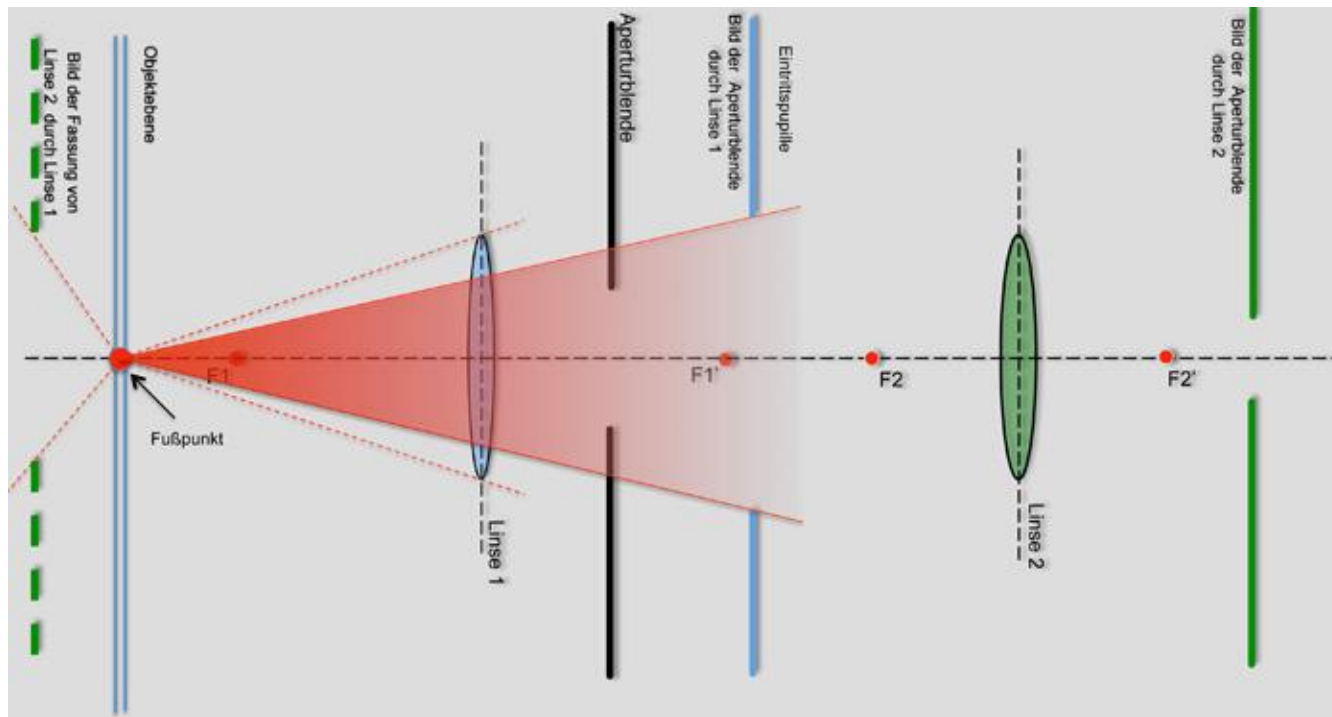


Bild 10.13: Bestimmung der Eintrittspupille.

Da die Aperturblende (schwarz) und Linse 2 vom Objekt aus gesehen hinter der Linse 1 liegt, müssen wir diese Blenden zunächst in den Objektraum übertragen. Das haben wir im Bild 10.11 bereits gemacht. Wir betrachten jeweils die Bilder dieser Blenden!

1. das (virtuelle) Bild der Aperturblende durch Linse 1. (hellblau)
2. das Bild der Fassung von Linse 2 durch Linse 1. (grün gestrichelt am linken Bildrand)

Das Ergebnis im Bild 10.14 ist eindeutig - das Bild der Aperturblende durch Linse 1 (hellblau) erscheint unter dem kleinsten Öffnungswinkel. Damit haben wir die helligkeitsbestimmende Blende gefunden: Das Bild der Aperturblende (hellblau) bestimmt den Öffnungswinkel auf der Objektseite und ist damit die **Eintrittspupille**

Mit Hilfe der Blenden und Pupillen ist es jetzt ganz einfach den Strahlenkegel durch das Linsensystem zu zeichnen:

1. ausgehend vom Fußpunkt in der Objektebene zeichnen wir einen Strahlenkegel dessen Öffnung durch die Eintrittspupille (hellblau) begrenzt wird;
2. der weitere Verlauf von Linse 1 bis Linse 2 wird durch die Aperturblende (schwarz) begrenzt;
3. nach Linse 2 wird der Öffnungswinkel durch die Austrittspupille (grün - Bild der Aperturblende durch Linse 2) vorgegeben.

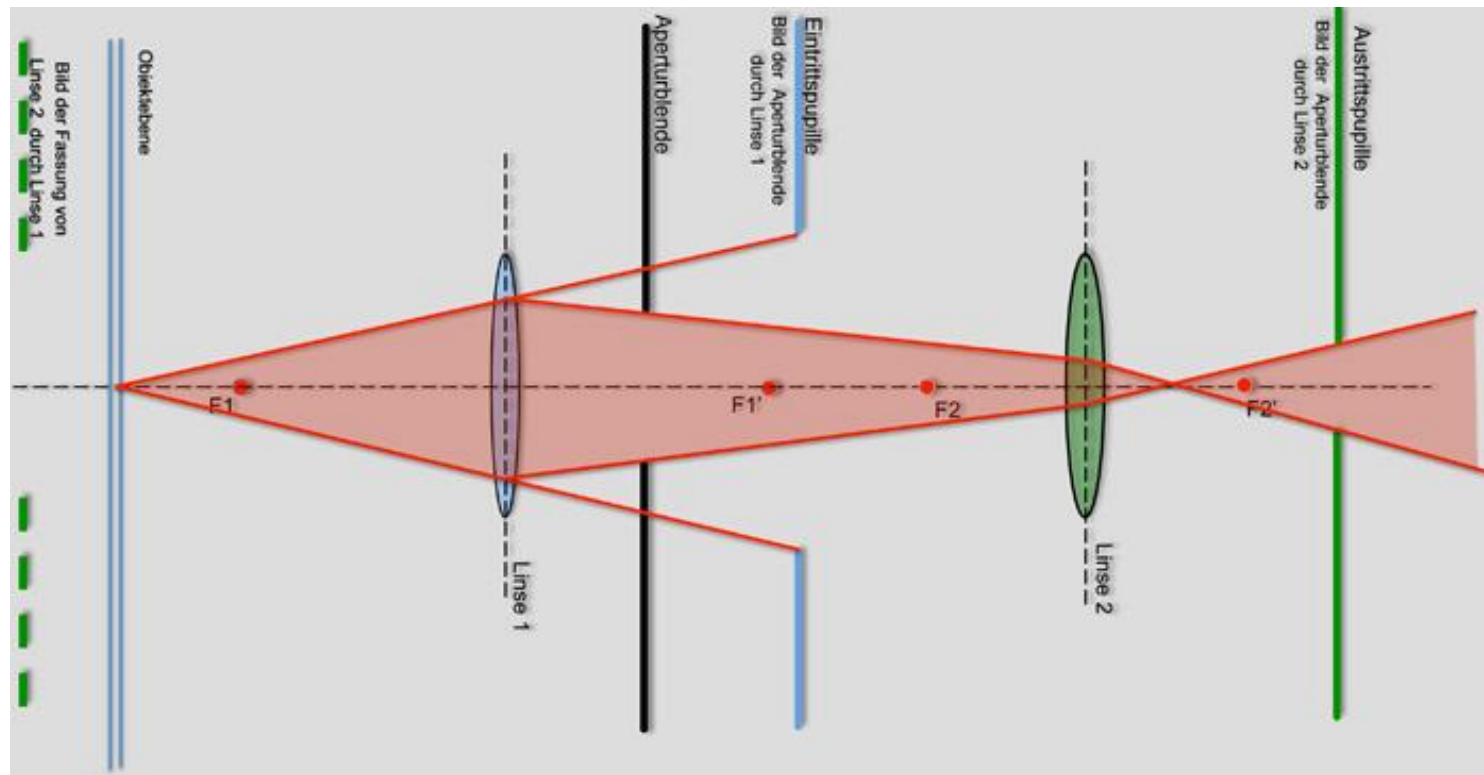


Bild 10.14: Strahlenkegel durch ein Linsen- / Blendensystem: konstruiert mit Hilfe von Blenden und Pupillen

Zusammenfassung:

Bevor Sie den Überblick verlieren, über die ganze Abbilderei von Blenden und Linsenfassungen, sollten wir zusammenfassen: - was treiben wir hier eigentlich?

Die Sache ist recht einfach, hier das Rezept:

1. Sie möchten z.B. wissen, wie eine Blende, die sich aus Sicht des einfallenden Lichtstrahls **hinter** einer Linse befindet auf den Öffnungswinkel eines Strahlenkegels **vor** der Linse auswirkt. Dazu müssen Sie diese Blende sozusagen *vor die Linse* holen und das tun Sie, indem Sie die Blende durch die Linse auf die Einfallsseite abbilden!

2. In einem System mit mehreren Linsen und Blenden müssen Sie natürlich sämtliche Linsenfassungen und Blenden in den Objektraum abbilden.

3. Anschließend begeben Sie sich an den Fußpunkt des abzubildenden Objektes und ermitteln die Blende oder das Blendenbild, die von dieser Position aus betrachtet den kleinsten Durchmesser hat. Das ist die **Eintrittspupille** und die dazu gehörende reale Blende ist die Aperturblende, sie bestimmt die Bildhelligkeit.

Alles klar?

Ich hoffe Sie haben jetzt etwas Ehrfurcht vor den Blenden, den "Löchern im Karton", gewonnen.

Aber bitte: keine voreiligen Schlüsse - die Sache wird noch besser:

wir müssen uns jetzt nämlich noch um das Gesichtsfeld kümmern, also um die Abschattung an den Rändern eines Bildes!

Das machen wir im nächsten Kapitel „Einfluss der Blenden auf das Gesichtsfeld“.

Redundanz - allgemein ein Zustand von Überschneidung oder Überfluss.
(Wikipedia)

10.2 Einfluss der Blenden auf das Gesichtsfeld

Bestimmung des Gesichtsfeldes in einem Linsensystem.

Ich bin ein großer Freund von "Redundanz"!

Ich finde davon kann man gar nicht genug haben; z.B. Notstromaggregate im Atomkraftwerk, aber auch in Lehrbüchern, oder im Unterricht. Viele Beispiele, die ein Problem von mehreren Seiten zeigen, helfen das Verständnis zu vertiefen.

In diesem Sinne wollen wir uns die Sache mit den Aperturblenden noch einmal ansehen, mit einem ganz ähnlichen Linsen- / Blendensystem wie im Kapitel 10.1: eine Anordnung aus zwei Linsen und einer Blende, z.B. die hier:

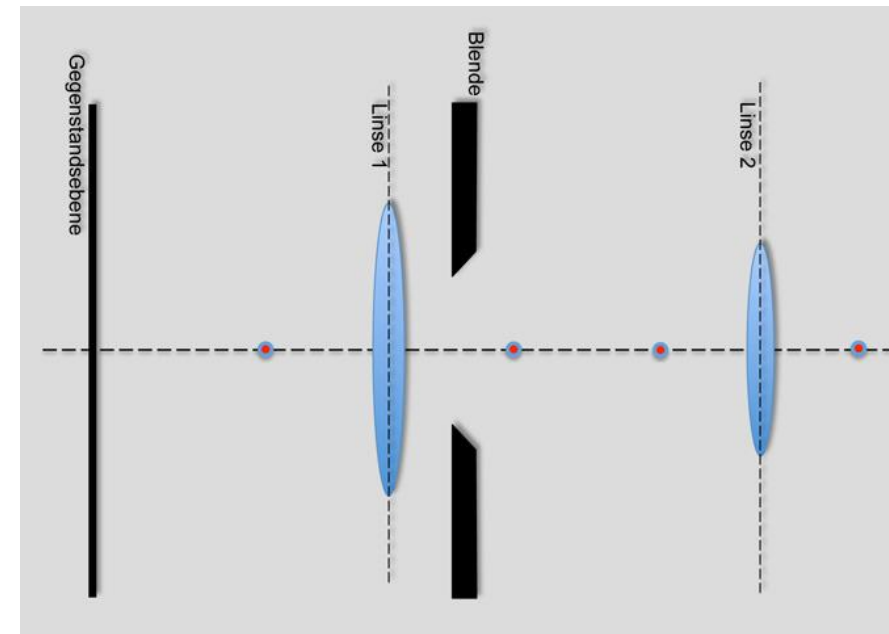


Bild 10.15: System aus zwei Linsen und einer Blende.

Diesmal interessiert uns aber nicht die generelle Bildhelligkeit, sondern die Frage: welche Teile eines Objektes aus der Gegenstandsebene werden mit welcher Helligkeit abgebildet?

1. Unser "System" verfügt über drei Blenden: Zwei Linsenfassungen und eine "echte" Blende.
2. Linse 1 ist der Gegenstandsebene direkt zugewandt.
3. Die Blende und die Fassung von Linse 2 befinden sich vom Gegenstand aus gesehen hinter Linse 1 und können sich deshalb nur indirekt auswirken.
4. Um den Einfluss von Linsenfassung 2 und der Blende bestimmen zu können, müssen wir diese realen Blenden in den Gegenstandsraum abbilden.

.... und das wollen wir jetzt 'mal machen:

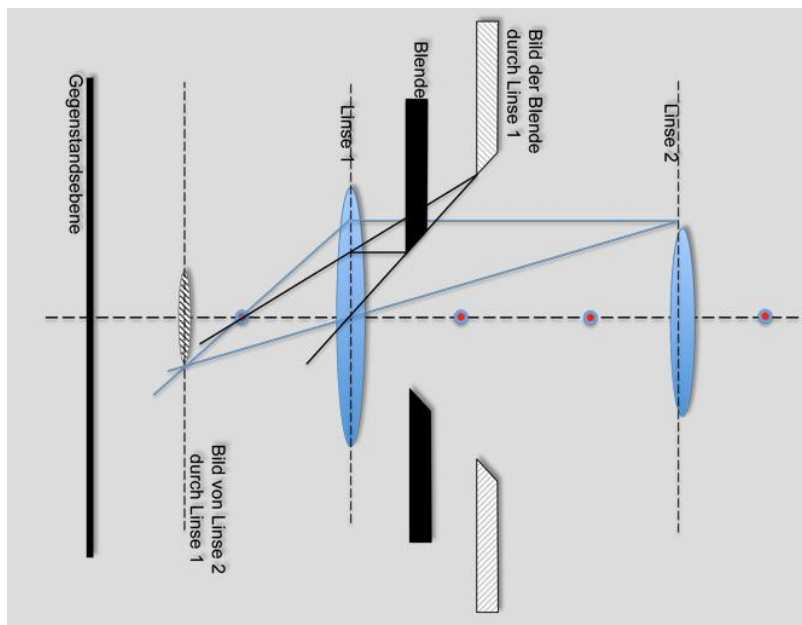


Bild 10.16: Bestimmung der von Linse 1 (Mitte) erzeugten Bilder von Linse 2 (rechts) und der Blende (schwarz)

Im Gegenstandsraum sind die folgenden Blenden bzw. Blendenbilder wirksam:

1. Bild von Linsenfassung 2 durch Linse 1 (weiß schraffiert)
2. virtuelles Bild der Blende (schwarz) durch Linse 1 (weiß schraffiert)
3. Linse 1 (hellblau)

Zur Bestimmung der **Aperturblende** bzw. deren **Eintrittspupille** begeben wir uns an den **Fußpunkt der Gegenstandsebene** auf der optischen Achse und ermitteln welche Blende, bzw. welches Blendenbild unter dem kleinsten Öffnungswinkel erscheint ...

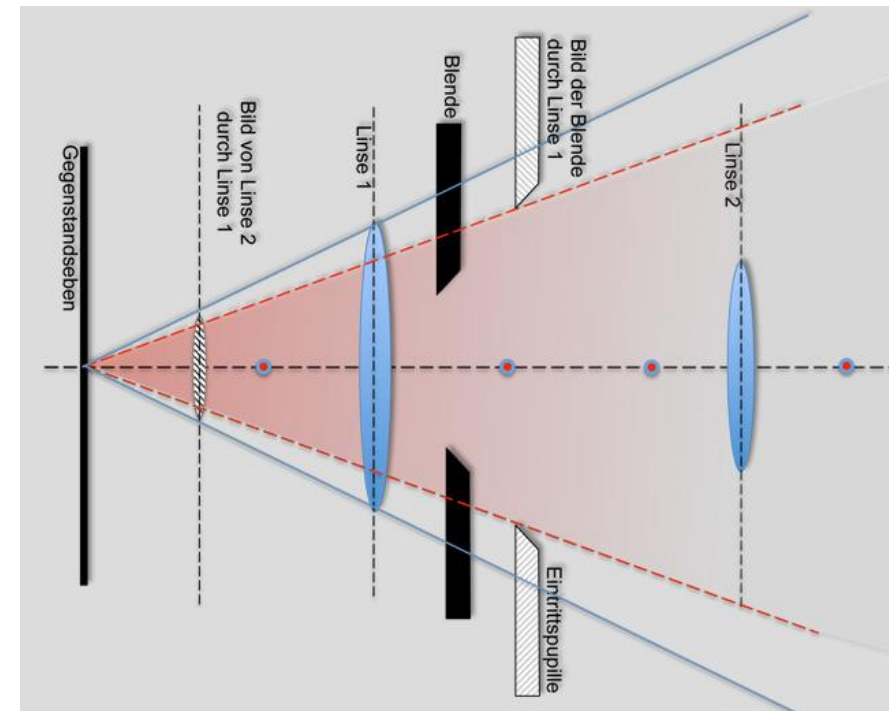


Bild 10.17: Bestimmung der Eintrittspupille des Systems.

.... und wie Sie sehen erscheint das Bild der "Blende" (weiß schraffiert) unter dem kleinsten Öffnungswinkel. (rot gestrichelt)

Die "Blende" (schwarz) ist also **Aperturblende** und ihr Bild die **Eintrittspupille!** (Knapp "unterlegen" ist das Bild der Linsenfassung 2). Bisher haben wir uns - so wie im vorhergehenden Kapitel 10.1 - nur um die Helligkeitsbestimmenden Blenden gekümmert. Das war in diesem Kapitel gar nicht unser Ziel – wir wollten eigentlich etwas über das Gesichtsfeld herausfinden. Sie werden aber gleich sehen, dass wir dazu die Aperturblende, bzw. die Eintrittspupille brauchen.

Als nächstes suchen wir also die Blende die das **Gesichtsfeld** bestimmt, das ist der Bereich aus der Gegenstandsebene, der gerade noch abgebildet wird.

Dazu begeben wir uns an den **Fußpunkt der Eintrittspupille** und ermitteln welche Blende, bzw. welches Blendenbild unter dem kleinsten Öffnungswinkel erscheint:

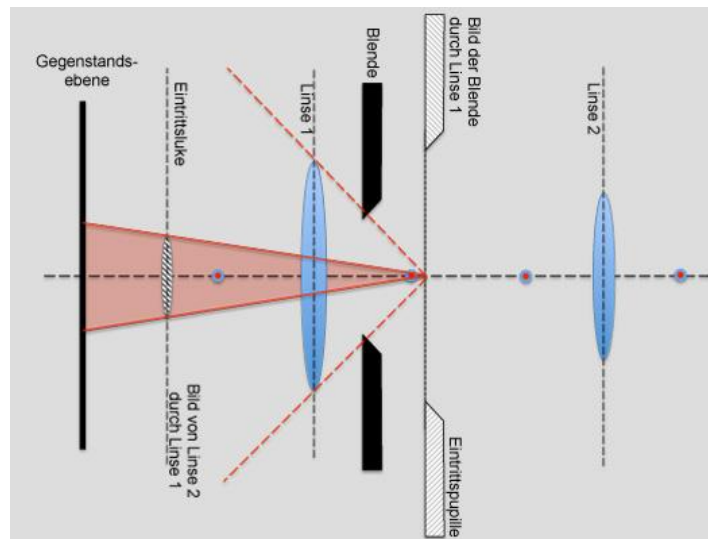


Bild 10.18: Bestimmung der Eintrittsluke des Systems.

Die "**Luke**" ist das Bild der Gesichtsfeldblende. Gesichtsfeldblende ist in diesem Fall die Fassung von Linse 2.

Tut mir leid, wenn ich Sie so strapaziere! Aber glauben Sie mir: das Größte haben Sie bereits hinter sich; die wesentlichen Elemente zur Bestimmung des Gesichtsfeldes haben wir zusammen!

Eintrittsluke - ist das Bild der Blende die das Gesichtsfeld begrenzt!

Bestimmung des Bereichs maximaler Helligkeit:

- Gleichseitige Kanten der Eintrittsluke und der Eintrittspupille verbinden und bis zur Gegenstandsebene verlängern. (Hellgraue Verbindungslinie)

Bestimmung der Halbschattengrenze (Gesichtsfeld):

- Fußpunkt der Eintrittspupille mit einer Kante der Eintrittsluke verbinden und bis zur Gegenstandsebene verlängern. (Graue Verbindungslinie)

Bestimmung der Dunkelgrenze:

- Gegenüberliegende Kanten der Eintrittspupille und der Eintrittsluke verbinden und bis zur Gegenstandsebene verlängern. (Schwarze Verbindungslinie)

Das Bild der Fassung von Linse 2 durch Linse 1, die den "Wettbewerb" um die Rolle der helligkeitsbestimmenden Blende knapp verloren hatte (s.o.), ist diesmal "Sieger"!

Dieses Blendenbild erscheint vom Fußpunkt der Eintrittspupille eindeutig unter dem kleinsten Öffnungswinkel, d.h. wir haben die **Eintrittsluke** gefunden und damit auch die Gesichtsfeldblende.

Zur Bestimmung des Gesichtsfeldes brauchen wir nur die **Eintrittsluke** und die **Eintrittspupille**.

Deshalb lassen wir in der nächsten Skizze mal alles Überflüssige weg:

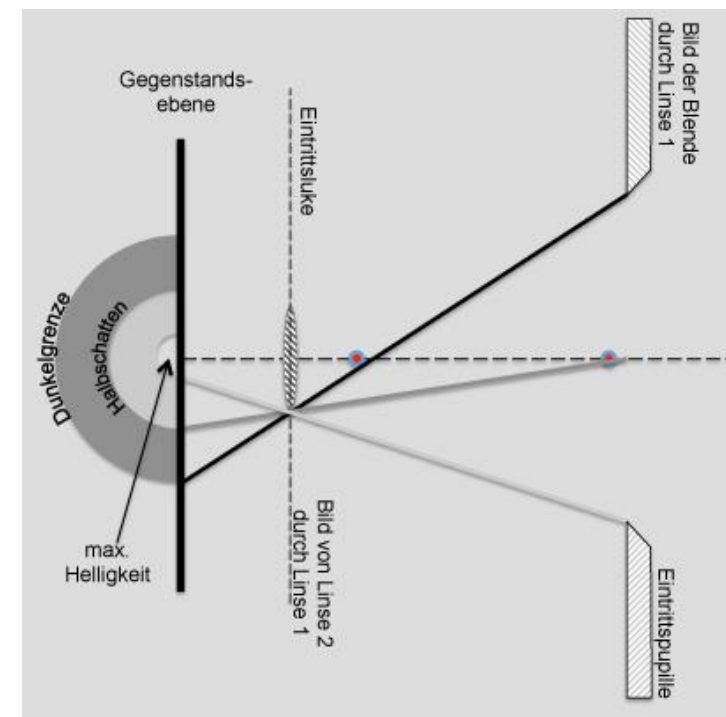


Bild 10.19: Bestimmung des Gesichtsfeldes.

So, das war's: die Gesichtsfeldgrenzen sind definiert!
Wir könnten jetzt eigentlich Schluss machen.

Aber ich ahne schon, Sie glauben mir das obige "Rezept" zur Bestimmung der verschiedenen Helligkeitsgrenzen nicht so recht.

Richtig? Wenn schon keinen mathematischen Beweis, aber etwas anschaulicher, hätten Sie's schon gern, oder?

Na gut: Als erstes wollen wir uns den Strahlverlauf für den Bereich maximaler Helligkeit und der Dunkelgrenze ansehen:

Hier zunächst den Bereich maximaler Helligkeit:

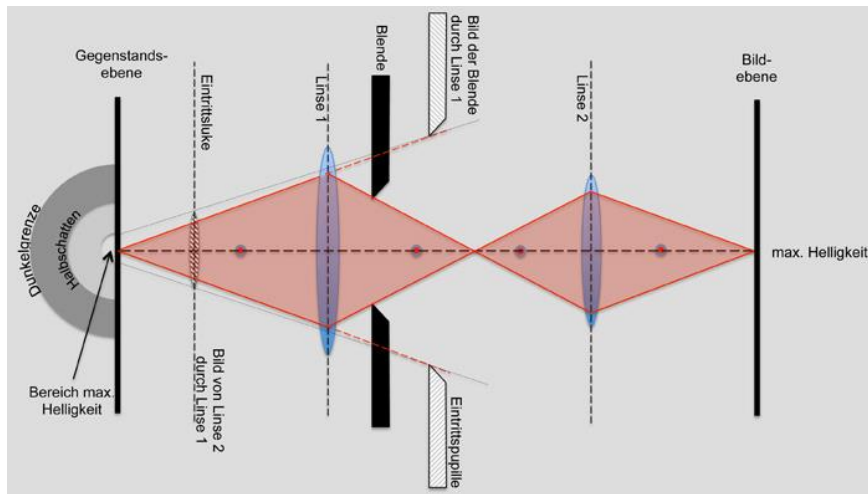


Bild 10.20: Bereich maximaler Helligkeit.

Bereich maximaler Helligkeit: (Gleichseitige Kanten der Eintrittsluke und der Eintrittspupille verbinden und bis zur Gegenstandsebene verlängern.)

Der Öffnungswinkel wird von der Eintrittspupille bestimmt und mit diesem Öffnungswinkel gelangt der Strahlenkegel bequem durch alle körperlichen Blenden (Linse1, Blende, Linse2)

Dunkelgrenze: (Gegenüberliegende Kanten der Eintrittspupille und der Eintrittsluke verbinden und bis zur Gegenstandsebene verlängern.)

Der Öffnungswinkel des Strahlenkegels, der von der Dunkelgrenze auf der Gegenstandsebene ausgeht wird wieder von der Eintrittspupille bestimmt. Im weiteren Verlauf wird dieser Strahlenkegel aber vollständig von der Fassung der Linse 2, bzw. vom Gehäuse des Gerätes absorbiert. Das ist auch an der Eintrittsluke zu erkennen, - der gesamte Strahlenkegel passt nicht mehr durch die Luke.

Halbschatten-, bzw. Gesichtsfeldgrenze:

Der Öffnungswinkel des Strahlenkegels, der von der Halbschattengrenze auf der Gegenstandsebene ausgeht wird (natürlich!) wieder von der Eintrittspupille (weiß schraffiert) bestimmt.

Im weiteren Verlauf wird (annähernd) die Hälfte des Strahlenkegels von der Fassung der Linse 2, bzw. dem Gehäuse absorbiert.

Das ist ebenfalls bereits an der Eintrittsluke zu erkennen: auch hier passt die Hälfte des Strahlenkegels nicht durch die Eintrittsluke.

Fällt Ihnen etwas auf?

Für die Konstruktion des Strahlverlaufes hätten wir die Linsen überhaupt nicht mehr gebraucht; die gesamte Strahlgeometrie steckt bereits in den Blenden, bzw. Blendenbildern.

.... und die Dunkelgrenze:

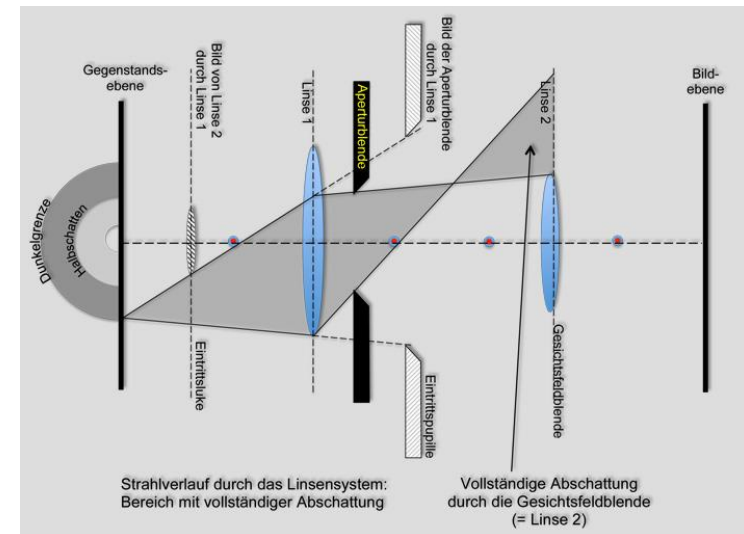


Bild 10.21: Dunkelgrenze

Und jetzt der etwas unübersichtliche Strahlverlauf für die Halbschatten- bzw. Gesichtsfeldgrenze:

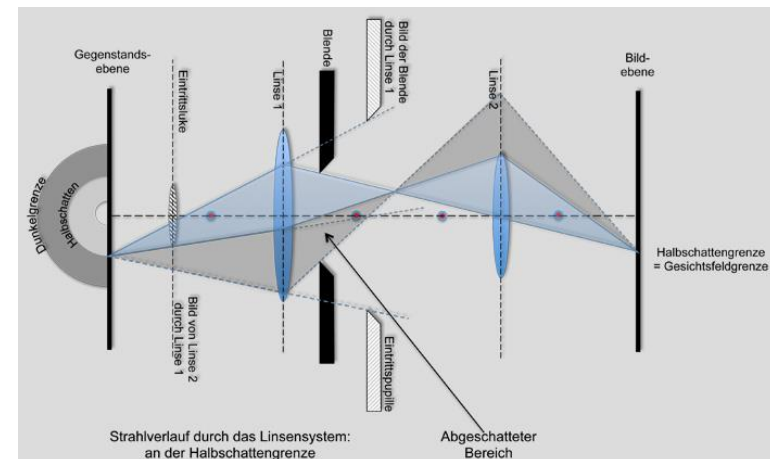


Bild 10.22: Halbschatten-, Gesichtsfeldgrenze

10.3 Der Diaprojektor und seine Blenden.

Sie glauben, dass Sie die Funktionsweise eines Diaprojektors kennen? Die vergrößerte Abbildung eines Dias durch eine Linse eben!

Weit gefehlt, - Sie werden sich wundern!

Wir haben bisher - ohne es ausdrücklich zu erwähnen - nur eine ganz bestimmte Art von Objekten betrachtet - die **selbstleuchtenden**.

D.h., von jedem Objektpunkt geht ein Strahlenbündel aus, dessen Öffnungswinkel durch die abbildende Optik begrenzt wird. Nun gibt es aber sehr oft den Fall, das das Objekt gar nicht selbst leuchtet, sondern von einer Lichtquelle angestrahlt wird, so wie das Dia bei dem hier betrachteten Projektor, oder das beleuchtete, transparente Objekt vor einem Mikroskopobjektiv!

Wie steht es jetzt mit der Helligkeitsbestimmenden Blende aus? Welches ist die Aperturblende, wo ist eine eventuelle Eintrittspupille zu suchen - und die vielleicht die wichtigste Frage: welche Teile des Dias/Objektes werden überhaupt abgebildet?

Lassen Sie uns die Angelegenheit Schritt für Schritt untersuchen.

Im folgenden Bild ist eine Anordnung skizziert, bei der die Glühwendel einer Projektorlampe als Lichtquelle dient. Ein Dia übernimmt die Rolle des Objektes, und dazu kommt noch eine Linse und ein Bildschirm. In diesem Fall wird der Öffnungswinkel des Strahlenbündels von der Abmessung der Lichtquelle, d.h. von der Größe der Lampenwendel bestimmt.

Na gut, - ich gebe es zu: wer benutzt heute noch einen Diaprojektor? Aber glauben Sie mir, auch bei den modernen "Beamern" gibt es das Problem der Gesichtsfeldbegrenzung.

Also wenn man es genau betrachtet, ist ein selbstleuchtendes Objekt eher die Ausnahme: Die Kerzenflamme oder das Glühbirnchen (auch bald nur noch im Museum zu besichtigen!) die Sie in den meisten Lehrbüchern der Optik finden, sind als Objekt für optische Geräte – Lupe, Mikroskop, Fernrohr – doch eher selten. In Regel geht es um die Abbildung von Objekten, die von einer weiteren Lichtquelle (Sonne oder Lampenlicht) beleuchtet sind.

Die Modellvorstellung, dass die Lampenwendel die Rolle der Aperturblende spielt, ist sicher etwas gewöhnungsbedürftig!

Man könnte dabei leicht dem Irrtum verfallen, dass man eine Steigerung der Bildhelligkeit allein durch die Vergrößerung der Lampenwendel erreichen könnte. Das ist natürlich nicht der Fall: eine Vergrößerung der Wendel bei konstanter Leistung würde natürlich die Leuchtdichte verkleinern, so dass die Bildhelligkeit davon nicht beeinflusst werden würde.

Trotzdem ist die Modellvorstellung, dass die Lampenwendel die Rolle der Aperturblende übernimmt sinnvoll.

Dazu die folgende Überlegung: Wenn man ganz dicht vor die Lampenwendel eine Irisblende setzt und diese kontinuierlich verkleinert, dann würde die Bildhelligkeit im selben Maße abnehmen! Wenn man also dafür sorgt, dass die Leuchtdichte der Lichtquelle konstant bleibt, dann kann man tatsächlich davon reden, dass sie als Aperturblende wirkt.

Die Lampenwendel ist also Aperturblende.

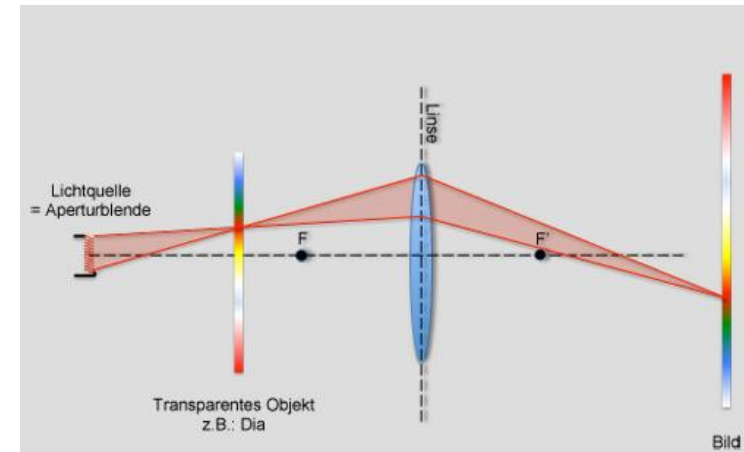


Bild 10.23: Lichtquelle (Lampenwendel) als Aperturblende.

Jetzt stoßen wir zum ersten Mal auf eine Schwierigkeit, die für den praktischen Gebrauch eines optischen Systems von größter Bedeutung ist, - die Frage nämlich: werden alle Punkte des Objektes bzw. des Dias mit gleicher Helligkeit abgebildet, und gibt es vielleicht sogar Bereiche, die nur abgedunkelt bzw. überhaupt nicht mehr auf der Leinwand erscheinen?

Die obige Skizze verdeutlicht, dass mit einer solchen "Vignettierung" (= Abschattung) tatsächlich gerechnet werden muss; in der folgenden Skizze wird es hoffentlich noch etwas deutlicher:

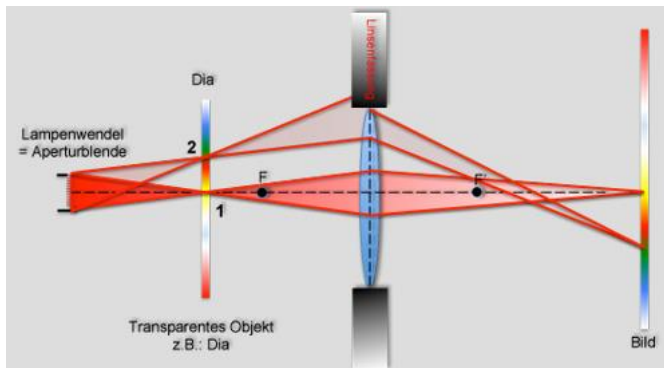


Bild 10.24: Vignettierung im Beleuchtungsstrahlengang.

Der Punkt '1' auf dem Dia wird mit vollem Öffnungswinkel, d.h. mit maximaler Helligkeit, auf dem Bildschirm erscheinen. Der Punkt '2' wird aber bereits etwas dunkler abgebildet, da ein Teil des Strahlenbündels durch die Fassung der Abbildungsoptik abgeschattet wird.

Weitere Punkte, die auf dem Dia noch dichter am Bildrand liegen, werden auf der Leinwand schließlich überhaupt nicht mehr sichtbar, die von hier ausgehenden Strahlenbündel verlieren sich vollständig im Gehäuse des Projektors, wie in der folgenden Skizze angedeutet.

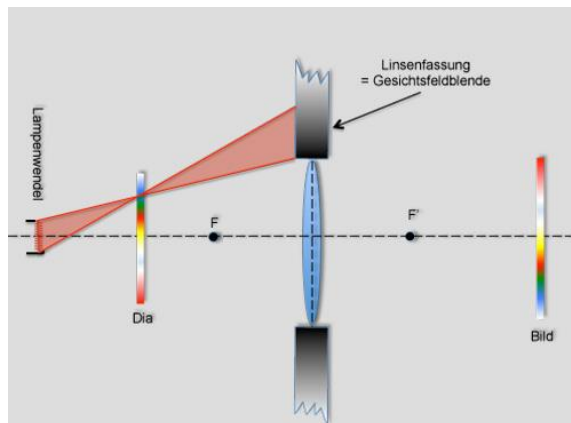


Bild 10.25: Linsefassung als Gesichtsfeldblende.

Die Rolle der Gesichtsfeldblende übernimmt in diesem Beispiel die Linsenfassung. Es ist leicht zu erkennen, dass sich durch Vergrößerung der Abbildungslinse auch das Gesichtsfeld vergrößern ließe, - aber das wäre sicher eine sehr schlechte Lösung, denn Linsen mit großem Durchmesser sind nicht nur teuer, sondern haben in aller Regel auch eine schlechte Abbildungsqualität.

Bevor wir aber die Lösung vorstellen wie denn nun ein funktionierender Projektor mit einem vollständigen, vor allem gleichmäßig ausgeleuchteten Bild aussieht, sollten wir zunächst noch die Frage untersuchen, wie man die Gesichtsfeldgrenzen, bestimmen kann. Das lässt sich an der obigen Anordnung nämlich ganz gut erläutern; also los geht's:

Bereiche mit maximaler Helligkeit erhält man, wenn man die gegenüberliegenden Kanten von Apertur- und Gesichtsfeldblende durch eine gerade Linie miteinander verbindet. (Im Bild unten die etwas dicker ausgezogene rote Linie!) Der Schnittpunkt dieser Linie mit dem Objekt markiert den Bereich, der mit maximalem Öffnungswinkel abgebildet wird.

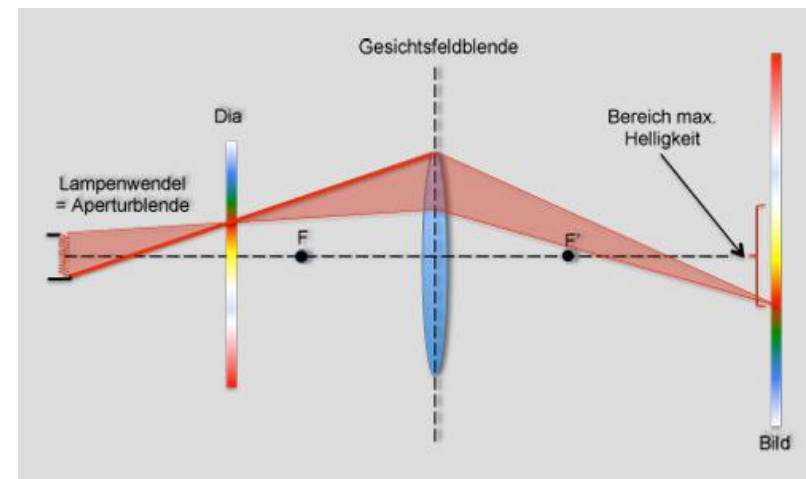


Bild 10.26: Bereiche maximaler Helligkeit.

Die **Gesichtsfeldgrenze** ist die Verbindungslinie zwischen dem Fußpunkt der Aperturblende (=Blendenmitte) und der Kante der Gesichtsfeldblende - im Bild unten die etwas dicker ausgezogene rote Linie - markiert den Bereich auf dem Objekt, der mit (annähernd) der halben Helligkeit abgebildet wird. Dies ist definitionsgemäß die Gesichtsfeldgrenze

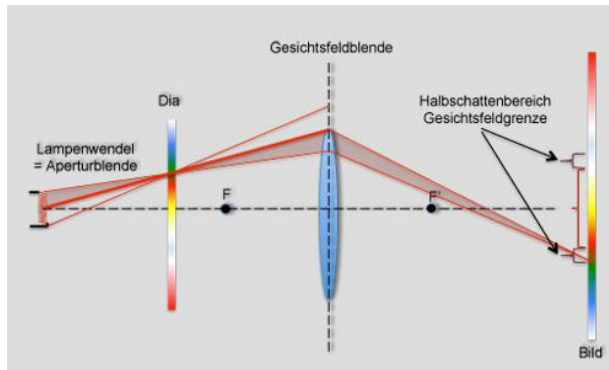


Bild 10.27: Bestimmung der Gesichtsfeldgrenze.

Die **Dunkelgrenze** ergibt sich, wenn man die Kanten der Apertur- und der Gesichtsfeldblende, die auf der gleichen Seite der optischen Achse liegen, miteinander verbindet

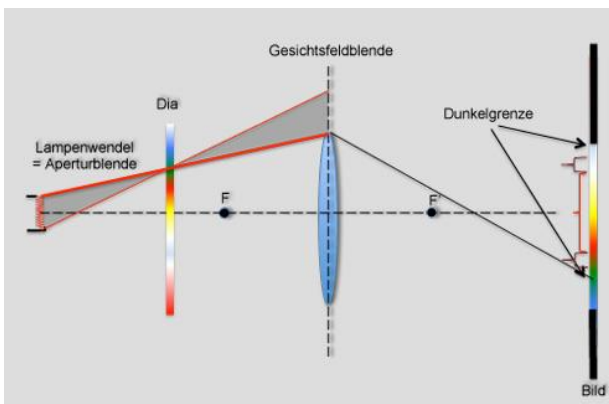


Bild 10.28: Bestimmung der Dunkelgrenze.

Hier noch eine Zusammenfassung der „Rezepte“ zur Bestimmung der Verschiedenen Helligkeitsbereich bei der Abbildung eines Dias:

Bereich maximaler Helligkeit: Gegenüber liegende Kanten von Apertur- und Gesichtsfeldblende miteinander verbinden.

Gesichtsfeldgrenze (Halbschattenbereich): Fußpunkt der Aperturblende mit einer Kante der Gesichtsfeldblende verbinden.

Dunkelgrenze: Auf der gleichen Seite der optischen Achse liegende Kanten von Apertur- und Gesichtsfeldblende verbinden

Diese Betrachtung über das Gesichtsfeld beim Abbildungsstrahlengang für ein transparentes nicht-selbstleuchtendes Objekt hat Ihnen sicher klargemacht, dass Sie niemals einen funktionierenden Projektor konstruieren könnten, wenn Sie den Einfluss der Blenden, Linsenfassungen u.s.w. außer acht lassen.

Das Problem ist also erkannt - aber wie sieht die Lösung aus? Wie muss ein Projektor beschaffen sein, der das Dia über den gesamten Bildbereich mit voller Helligkeit abbildet und dabei mit einer handlichen, d.h. möglichst kleinen, Abbildungsoptik auskommt?

Ganz offensichtlich spielt der Abstand der Blenden untereinander und ihr Abstand zum Objekt eine wichtige Rolle. Betrachten Sie doch bitte daraufhin eine der obigen Skizzen: Wenn es z.B. möglich wäre, das Dia ganz dicht an die abbildende Linse heranzuschieben, dann ließe sich das Gesichtsfeld erheblich vergrößern

Die Grundidee ist richtig - sie scheitert nur an folgendem Problem:

Der Abstand zwischen Dia und Projektionslinse lässt sich nicht beliebig verkleinern. Wenn Sie auf ein reelles, vergrößertes Bild Wert legen – und ich denke das tun Sie (!) – dann muss sich das Dia zwischen der einfachen und der doppelten Brennweite befinden, – Sie erinnern sich sicher an die Erklärungen im Kapitel 7.

In dieser Situation hilft nun die Tatsache, dass die Rolle der Aperturblende auch vom Bild dieser Blende, der sog. 'Eintrittspupille', übernommen werden kann. (Kapitel 10.1) Wenn man also den Abstand zwischen der Eintrittspupille und der Gesichtsfeldblende sehr klein – am besten zu Null – macht, lässt sich dann vielleicht das Problem mit der Abschattung lösen?

Sie vermuten richtig! Ich hätte diese rhetorische Frage gar nicht formuliert, wenn sie nicht die Lösung enthalten würde. Mit Hilfe der sog. 'Kondensorlinse' wird ein Bild der Lampenwendel am Ort der Projektionslinse erzeugt (Bild 10.29):

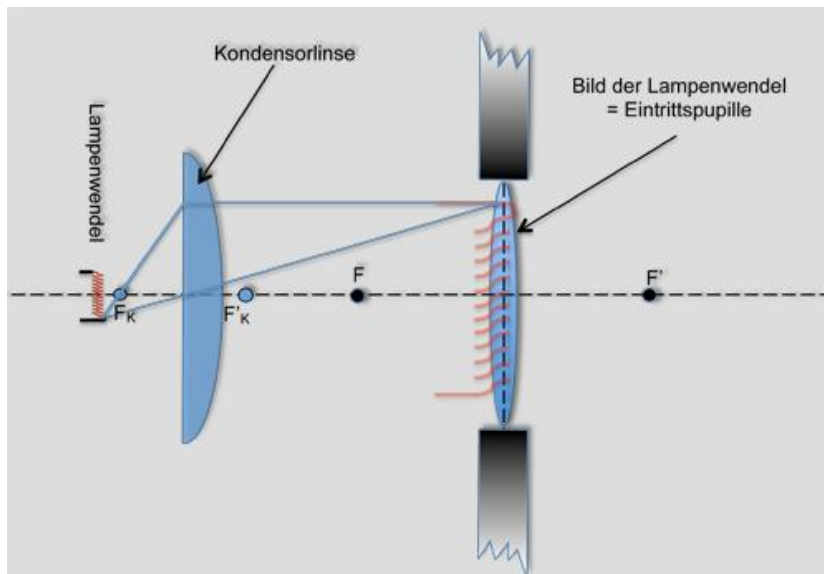


Bild 10.29: Wirkung einer Kondensorlinse im Abbildungsstrahlengang eines Diaprojektors.

Na schön, wir wissen jetzt was alles nicht geht, – aber wie funktioniert ein Diaprojektor denn nun?

Und jetzt kommt der unglaubliche Trick

Im folgenden Bild (10.30) ist der vollständige Abbildungsstrahlengang mit Kondensorlinse dargestellt:

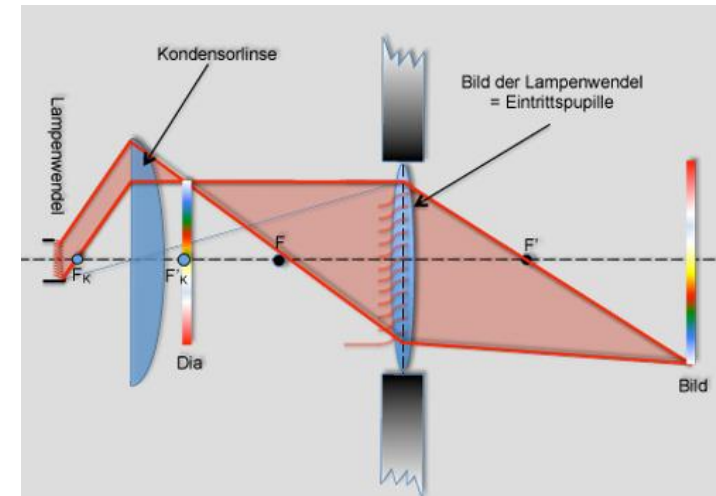


Bild 10.30: Abbildungsstrahlengang mit Kondensorlinse in einem (Dia-)Projektor.

Nach Einfügen einer Kondensorlinse zwischen Lampenwendel und Objekt (=Dia) können alle Teile des Dias abgebildet werden, denn:

- das Bild der Lampenwendel am Ort der Projektionslinse funktioniert als **Eintrittspupille**. Von **jedem** Punkt des abzubildenden Objektes gelangt ein Strahlenkegel in die Projektoroptik, dessen Öffnungswinkel vom Durchmesser der Eintrittspupille, also dem Bild der Lampenwendel, bestimmt wird. Das Bild auf der Leinwand ist - wie gewünscht - gleichmäßig hell

Na, ist das ein Trick?

Hätten Sie das dem guten alten Projektor zugetraut?

Wir können den Durchmesser der Abbildungsoptik (das Objektiv) des Projektors sogar beliebig klein machen, ohne eine Abschattung des projizierten Bildes zu riskieren; aber leider wird dabei auch die Bildhelligkeit erheblich leiden!

Das Bild der Lampenwendel am Ort der Projektionslinse sollte möglichst genau in die Linsenöffnung passen. Wenn das Bild zu groß ist, dann wird die Abbildung dunkler und die Fassung der Projektorlinse übernimmt die Rolle der Aperturblende. Wenn das Bild sehr viel kleiner ist, dann wird die Projektoroptik nicht mit der vollen Öffnung benutzt und man hätte durch die Verwendung einer lichtschwächeren Version Geld sparen können

Bei konventionellen Projektoren wird das 'Scharfstellen' des Bildes durch eine Verschiebung des Projektorobjektivs realisiert. Das mag konstruktiv die einfachste Lösung sein, aber eigentlich verstößt diese Methode gegen die Grundidee, die zum Einsatz der Kondensorlinse geführt hatte. Bei diesem Verfahren wird die Position des Projektorobjektivs relativ zum Bild der Lampenwendel verschoben, d.h., die optimale Anpassung wird gestört. Sinnvoller wäre es, das Dia zur 'Scharfeinstellung' zu verschieben.

Ich hoffe, dass Sie jetzt etwas mehr Respekt vor dem Diaprojektor haben, der bei Ihnen zu Hause so langsam einstaubt.

Wenn Ihre handwerklichen Fähigkeiten damit nicht überfordert sind, dann nehmen Sie doch mal die Kondensorlinse heraus, sie werden sich wundern, was von Ihrem schönen Bild noch übrigbleibt

Ach ja, noch etwas: Um die Lichtausbeute weiter zu steigern, wird oft hinter der Lampenwendel ein Hohlspiegel gestellt, der die Lampenwendel in sich abbildet, dabei muss man allerdings höllisch aufpassen, dass sich die Projektorlampe nicht überhitzt. Das gilt übrigens auch für das Dia und das gesamte Projektorgehäuse. Aus diesem Grund werden häufig Wärmeschutzfilter *) vor das Dia gesetzt und der gesamte Apparat wird mit einem Ventilator gekühlt

*) Wärmeschutzfilter sind Glasscheiben, die den langwelligen Teil des Lichtes - also die Wärmewellen - absorbieren und nur den sichtbaren Teil des Spektrums durchlassen. Vorsicht das Ding wird höllisch heiß!

Eine kurze Zusammenfassung:

Frage: Was war der Grund warum der Kondensor so wichtig ist?

Antwort: um eine gleichmäßige Ausleuchtung des Dias zu erreichen!

Frage: Hätte man das nicht auch durch eine Vergrößerung der Abbildungsoptik erreichen können?

Antwort: Ja, hätte man, aber das wäre aufwändig und damit teuer geworden!

Frage: Wieso, die Kondensorlinse muss doch auch einen ziemlich großen Durchmesser haben?

Antwort: Ja, richtig, aber eine große Kondensorlinse ist trotzdem sehr viel billiger als eine Projektionsoptik mit dem notwendigen großen Durchmesser, - aus zwei Gründen:

1. Die Kondensorlinse muss keine sehr gute Abbildungsqualität haben;
2. Die Abbildungsoptik müsste einen noch größeren Durchmesser als der Kondensor haben

Aber lassen Sie sich von diesen technischen Details nicht verwirren - der wirklich wichtige Punkt, der den Projektor zu einem funktionierenden Gerät macht, besteht in der Abbildung der Lampenwendel in die Projektionsoptik - alles andere ist Schnickschnack!

Und zum Schluss will ich Ihnen gern noch die Arbeit abnehmen Ihren heimischen Diaprojektor zu öffnen, um sich all die Komponenten anzusehen von denen wir hier - reichlich theoretisch! - gesprochen haben. (Mein Dank für das Bild geht an Rainer Knäpper)

Hohspiegel Lampe Kondensor Wärmeschutzfilter

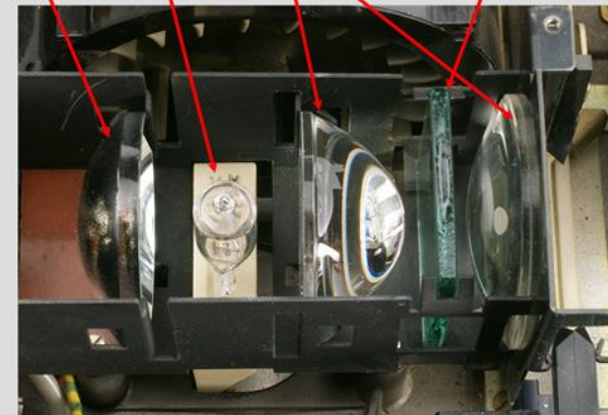


Bild 10.31: Das Lampengehäuse eines Dia-Projektors.

11.0 Fata Morgana - die Grenzen des Fermat'schen Prinzips

In diesem Kapitel wollen wir 'mal so richtig aufräumen, ergänzen und klarstellen, was bis bislang so im Halbschatten bzw. in der Halbwahrheit stand.

Sie kennen solche Bilder, ...



Bild 11.1: Sonnenuntergang

... aber sind Sie auch sicher, dass dieses Bild keine optische Täuschung ist?

Als erstes will ich Ihnen das Bild von dem Mann nachreichen, der uns die Grundlage für die Überlegungen in dieser Broschüre geliefert hat.



Bild 11.2: Pierre de Fermat (1608 – 1665)

Darf ich vorstellen: **Pierre de Fermat**, geboren 1608 (vielleicht auch 1601)) in Beaumont de Lomagne, gestorben 1665 in Toulouse.

Fermat war übrigens "gelernter" Jurist und hat Zeit seines Lebens als Anwalt und später als Richter gearbeitet. Mathematik und Naturwissenschaft war wohl eher ein Hobby, das er im Wesentlichen in der ersten Hälfte seines Lebens betrieb. Als einflussreiches Parlamentsmitglied und als Richter hatte er im späteren Leben wohl kaum noch Zeit für solche "Spielereien".

Details zum Leben und den Arbeiten von Fermat finden Sie bei Wikipedia (https://de.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat)

Optik - eine Wissenschaft der Grenzflächen?

Wie das so ist mit flotten Sprüchen – in der Regel handelt es sich um Halbwahrheiten!

So, jetzt zur Sache - ein Sonnenuntergang soll uns weiterhelfen; aber der Reihe nach!

Bitte erinnern Sie sich: Im Kapitel 3 über die Brechung hatten wir uns der 'Behauptung' von Pierre de Fermat angeschlossen, dass ein Lichtstrahl bestrebt ist, den Weg zwischen zwei Punkten in der kürzest möglichen Zeit (nicht auf dem kürzest möglichen Weg!) zurückzulegen.

Aus diesem Prinzip ließ sich sehr elegant das Brechungsgesetz und in der weiteren Folge die Abbildung durch Linsen und Linsensysteme herleiten. Wir hatten auch bereits angedeutet, dass sich das Reflexionsgesetz sehr gut mit dem Fermat'schen Prinzip verträgt, und es wird Sie sicher nicht wundern, dass auch der Strahlverlauf und die Abbildung an Hohlspiegeln sehr einfach mit Hilfe dieses Prinzips zu beschreiben ist, - ist ja im Grunde auch nichts anderes als Reflexion.

Bei den bisherigen Betrachtungen war immer eine Grenzfläche im Spiel: z.B. Luft-Wasser, oder Luft-Glas.

An diesen Grenzflächen wird die Ausbreitung des Lichtstrahls beeinflusst; er wird gebrochen und / oder reflektiert, und wenn man diese Grenzflächen geschickt gestaltet, dann lassen sich damit Abbildungen erzeugen. Vor dem Hintergrund dieser Effekte könnte man sich sogar zu der Formulierung hinreißen lassen, dass die Optik die "Wissenschaft der Grenzflächen" ist.

Die letzte Aussage ist mit Vorsicht zu genießen, denn es gibt auch Möglichkeiten, den Verlauf eines Lichtstrahls ohne eine scharf lokalisierte Grenzfläche zu beeinflussen, z.B. wenn sich der Brechungsindex, - d.h. die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes innerhalb eines Mediums -, kontinuierlich ändert. Wenn Fermat mit seinem Prinzip recht hat, dann muss der Lichtstrahl in dieser Situation auf einer gekrümmten Bahn verlaufen.

Ein wichtiges Beispiel dafür ist die Ausbreitung des Lichtes in der Atmosphäre: der Luftdruck nimmt von der Erdoberfläche bis in den Weltraum hinein kontinuierlich ab. (Wetterbedingte Luftdruckschwankungen lassen wir mal beiseite!) Da der Brechungsindex der Luft eine Funktion der Dichte und damit abhängig vom Luftdruck ist, ändert sich damit auch der Brechungsindex kontinuierlich von einem Wert von etwa 1,000276 (auf der Erdoberfläche) bis auf 1,0 im Vakuum des Weltraumes.

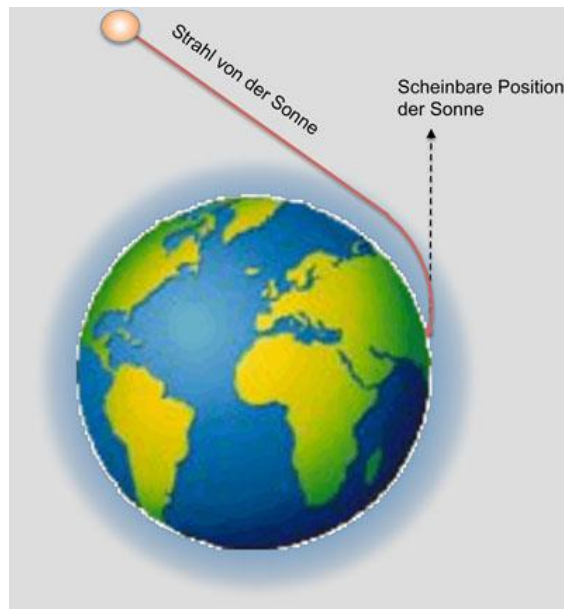


Bild 11.3: Verlauf eines Lichtstrahls in der Erdatmosphäre.

Wenn ein Lichtstrahl von der tiefstehenden Abendsonne schräg auf die Lufthülle der Erde trifft, dann wird er *versuchen*, einen möglichst großen Teil seines Weges in den Luftschichten mit kleinem Brechungsindex, d.h. hoher Geschwindigkeit und einen möglichst kurzen Teil in den Bereichen mit großem Brechungsindex zurückzulegen. Daraus resultiert der im obigen Bild dargestellte, gebogene Strahlverlauf.

Sie nehmen die Proportionen dieser Zeichnung bitte nicht wörtlich, - die Atmosphärenhülle ist im Verhältnis zum Erddurchmesser in Wirklichkeit viel dünner und auch die Strahlablenkung ist natürlich nicht so stark. Es geht hier um's Prinzip

Ach - noch etwas:

Da die Krümmung des Lichtstrahls mit abnehmender Winkelhöhe zunimmt, erscheint die Sonnenscheibe am Horizont etwas abgeplattet. Der vertikale Durchmesser wird scheinbar um 6" verkleinert! (Zitat aus Bergmann-Schaefer, "Lehrbuch der Experimentalphysik", Bd. III, Optik, 1974, Seite 175)

Entschuldigung: die Formulierung ".... er wird versuchen einen möglichst großen Teil seines Weges ..." ist natürlich blanker Blödsinn!

Der Lichtstrahl wird gar nichts "versuchen", er gehorcht lediglich einem Naturgesetz.

Übrigens: auch der von mir sehr verehrte Richard Feynman ist sich nicht zu schade den physikalischen Phänomenen menschliches Verhalten zu unterstellen.

Er schreibt:

".. und das Licht entscheidet, welches die kürzeste Zeit oder die extreme Zeit ist und wählt diesen Weg. Aber was tut es, wie findet es dies heraus? Riecht es die nahegelegenen Wege und vergleicht diese miteinander? Die Antwort ist, ja, das tut es sozusagen."

Achten Sie mal darauf: Sie werden in der naturwissenschaftlich / technischen Literatur immer wieder Formulierungen finden, die der unbelebten Natur eine gewisse Intelligenz oder Eigeninitiative mit durchaus menschlichen Verhaltensweisen zutraut. - Vielleicht ein interessantes Phänomen für einen Psychologen?

Wenn wir die Sonne am Abend noch über dem Horizont sehen, befindet sie sich in Wahrheit schon längst darunter!

Um eine ganz ähnliche Erscheinung handelt es sich bei der Fata Morgana, einer Luftspiegelung über einer heißen Oberfläche, z.B. einer Straße oder dem heißen Wüstensand. Durch die hohen Temperaturen in der Nähe der Straße entsteht eine Verteilung des Brechungsindex, die dafür sorgt, dass der Lichtstrahl auf einer nach oben gekrümmten Bahn verläuft, weil dieser zeitlich kürzer ist als der direkte. Im Bild unten wird die Palme gespiegelt; sehr viel öfter, können Sie aber die Spiegelung des Himmels beobachten, was dann wie eine große blaue, durch den Einfluss der Luftschlieren wellige Fläche aussieht und dem Verdurstenden in der Wüste ein Gewässer vorgaukelt.

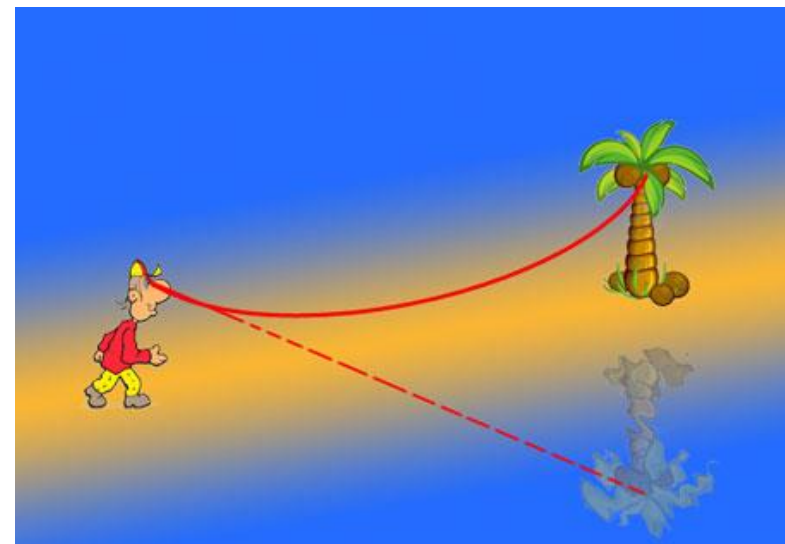


Bild 11.4: Luftspiegelung in der Wüste.

Diese Beispiele für die Ausbreitung des Lichtes in einem Medium, dessen Brechungsindex sich kontinuierlich ändert, machen

deutlich, dass wir das Fermat'sche Prinzip doch etwas genauer definieren müssen.

Um den Übergang zu einer kontinuierlichen Schichtung des Brechungsindex in den Griff zu bekommen, starten wir zunächst mit einem Beispiel, bei dem der Lichtstrahl durch einen Glasplattenstapel aus den unterschiedlichsten Glassorten hindurchläuft:

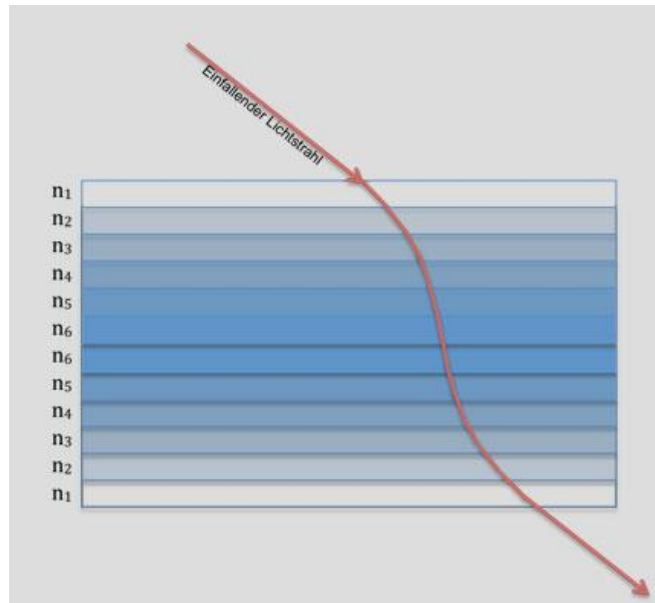


Bild 11.5: Ein Lichtstrahl durchläuft einen Glasplattenstapel mit gestaffeltem Brechungsindex.

Durch eine geeignete Staffelung der Brechungsindizes lässt sich fast jeder Strahlverlauf einstellen. Aber natürlich gilt auch hier Fermats Forderung, dass die Gesamtlaufzeit ein Minimum sein sollte. Wenn man die Teilwegstrecken in den Glasplatten mit s_i und die jeweiligen Geschwindigkeiten des Lichtes mit v_i bezeichnet, dann gilt für die gesamte Laufzeit:

Wenn Sie den ganzen "Formelkram" nicht mögen, dann lesen Sie jetzt bitte hier auf den (grau unterlegten) Innenseiten weiter - Sie verpassen nichts – na ja, - fast nichts!

Wir bilden die Summe der Laufzeiten für die einzelnen Teilstrecken in dem oben gezeigten Glasplattenstapel und

...rechnen diesen Wert in die optische Weglänge um.

Achtung nicht verwechseln - Wir reden hier nicht von der **geometrischen Weglänge**, sondern von der **optischen Weglänge** und die ergibt sich aus dem Produkt von Brechungsindex und der geometrischen Wegstrecke und ist damit ein Maß für die **Laufzeit** (Gehen Sie doch 'mal zurück zu Kapitel 3 wo wir uns über die "optische Weglänge" unterhalten haben!)

Nach dem Fermat'schen Prinzip gilt, dass das Licht die Strecke zwischen zwei Punkten in der **kürzest möglichen Zeit**, d.h. auf der kleinsten optischen Weglänge durchläuft.

Jetzt stellen Sie sich bitte vor, dass die Schichten in dem Glasstapel (Bild 11.5) immer dünner werden und die Änderung des Brechungsindex von Schicht zu Schicht immer kleiner, so dass wir schließlich zu einer ganz gleichmäßigen Änderung des Brechungsindex gelangen, - so wie bei der Lufthülle rund um die Erde - dann verläuft der Lichtstrahl auf einer gleichmäßig gekrümmten Bahn.

$$11.1 \quad \tau = s_1/v_1 + s_2/v_2 + s_3/v_3 + \dots$$

Oder:

$$11.2 \quad \tau = \sum s_i / v_i$$

Nun kann man, wie Sie sich bestimmt erinnern, die Lichtgeschwindigkeit v_i innerhalb eines bestimmten Mediums durch den Brechungsindex n_i und die Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 ausdrücken:

$$11.3 \quad v_i = c_0/n_i$$

d.h. der obige Summenausdruck für die Laufzeit $\tau = \sum s_i / v_i$ lässt sich sofort umschreiben:

$$11.4 \quad \tau = 1/c_0 \cdot \sum n_i \cdot s_i$$

Das Produkt $n_i \cdot s_i$ ist die sog. 'optische Weglänge'. Man kann das Fermat'sche Prinzip deshalb auch umformulieren:

"Das Licht durchläuft eine Strecke zwischen zwei Punkten auf der kleinsten optischen Weglänge."

Für ein Medium mit kontinuierlicher Verteilung des Brechungsindex muss die Summe allerdings durch ein Integral ersetzt werden:

$$11.5 \quad \tau = 1/c_0 \cdot \int n(s) ds$$

oder, wenn man sich auf die optische Weglänge L konzentriert:

$$11.6 \quad L = \tau \cdot c_0 = \int n(s) ds$$

Die Angelegenheit lässt sich (natürlich!) auch etwas mathematischer formulieren: Um den Extremwert der Laufzeit τ zu berechnen, hatten wir die folgende Bedingung benutzt:

$$11.6 \quad \delta \tau(x) = (d\tau/dx) \delta x = 0$$

und zur Herleitung des Brechungsgesetzes auf den Ausdruck für die Laufzeit angewandt. Wir hatten oben für die gesamte optische Weglänge den Ausdruck $L = \tau c_0 = \int n(s) ds$ notiert. Wenn $\delta \tau = 0$ ist, dann ist das identisch mit:

$$11.7 \quad \delta \int n(s) ds = 0$$

d.h., die Variation des optischen Weges ist Null. **(Diese Funktion nennt man auch "Eikonal")**

.... und diese Bedingung wird eben bei der Fata Morgana oder beim Sonnenuntergang für die gekrümmten Lichtstrahlen am besten erfüllt!

Sie werden einwenden, dass diese Art der Optimierung des Strahlverlaufes nicht mehr viel mit Fermats Kriterium der kürzesten Zeit zu tun hat!

Ja und Nein - wenn Sie nämlich aus der Vielzahl der möglichen Strahlverläufe denjenigen mit der kürzesten Zeit herausuchen, also das Minimum, dann sind im Normalfall (einen stetigen Funktionsverlauf vorausgesetzt) die Laufzeiten der benachbarten Strahlverläufe sehr ähnlich, d.h. die Variation des ist annähernd Null.

Mit dieser letzten Formulierung des Fermat'schen Prinzips ist den Formalisten hoffentlich Genüge getan, und wir können uns der Frage zuwenden was denn die physikalische Bedeutung dieses so umformulierten Fermat'schen Prinzips sein könnte.

Also - um was geht es hier eigentlich?

Wenn wir mal für einen kurzen Moment die Strahlenoptik vergessen und uns daran erinnern, dass man das Licht auch als

Achtung - neuer Gesichtspunkt!

Bevor wir diesen Formalismus weiterentwickeln, sollten wir uns innerlich zurücklehnen und überlegen, was wir hier eigentlich treiben!

Möglicherweise geht es Ihnen so wie mir: Irgendwie hat man das Gefühl, dass diese Prinzipien mit der kürzesten Zeit (Fermat) oder dem kürzesten Weg (Hero) noch nicht ganz den Kern der Wahrheit treffen.

Vielleicht hatten Sie bereits bei der Diskussion um die Reflexion an einer Spiegeloberfläche den Eindruck, dass hier etwas nicht stimmen kann. Schauen Sie doch noch einmal ins Kapitel 2 (Seite 15 „Das Reflexionsgesetz“, Bild 2.1): Der Lichtstrahl, der in der kürzesten Zeit - und auf dem kürzesten Weg - vom Startpunkt zum Endpunkt gelangt, ist natürlich der direkte und nicht derjenige, der den Umweg über die Spiegeloberfläche nimmt! Um Sie nicht auf diesen Gedanken zu bringen, hatte ich diese direkte Verbindung in den Bildern gar nicht erst eingezeichnet.

Was ist also dran an einem Prinzip, das es offensichtlich gestattet, die Gesetze der Lichtausbreitung richtig herzuleiten, obwohl es eigentlich falsch, - na ja, sagen wir „um die Ecke“ gedacht ist?

Antwort: Wir haben uns bisher mit einer Halbwahrheit begnügt und - halb wahr ist eben auch falsch!

Die richtigere Formulierung, die die von uns bisher benutzte miteinschließt, lautet:

"Ein Lichtstrahl muss beim Durchgang vom Startpunkt zum Endpunkt eine optische Weglänge durchlaufen, die stationär in Bezug auf Änderungen jenes Weges ist."

(Zitat aus E. Hecht, "Optik", Addison-Wesley Publishing Comp. 1989, Seite 96.)

oder etwas konkreter:

"Ein Strahl, der sich auf einem bestimmten speziellen Weg bewegt, hat die Eigenschaft, dass es bei kleinen Änderungen (sagen wir einer einprozentigen Verschiebung) des Strahles in einer x-beliebigen Weise, sagen wir des Ortes, wo er auf den Spiegel trifft, oder der Kurvenform oder sonst irgend etwas, in erster Näherung keine Zeitänderung gibt."

(Zitat aus: Richard P. Feynman, "Vorlesungen über Physik", Bd.1, Oldenbourg Verlag, 1991, Seite 363 oben.)

Der Lichtstrahl verläuft offenbar bevorzugt auf den Wegstrecken, bei denen geringfügige Verschiebungen keine große Auswirkung auf die Laufzeit haben. Ein dicht benachbarter Strahl trifft deshalb annähernd zur gleichen Zeit, d.h. mit der gleichen Phasenlage, am Zielort ein und dadurch können sich die (Licht-) Wellenzüge durch konstruktive Interferenz (phasengleiche Überlagerung) verstärken.

Das ist natürlich eine herbe Enttäuschung für diejenigen von Ihnen, die im Fermat'schen Prinzip den Ausdruck einer ordnenden Hand sehen wollen, im Sinne eines göttlichen Lenkers, der jedem Lichtstrahl kurz bevor er die Quelle verlässt zuflüstert, welches wohl der kürzeste bzw. beste Weg zum Ziel sein könnte.

Nein, - ich fürchte die Angelegenheit ist viel profaner: **Eine Lichtquelle sendet ihre Strahlen ganz wahl- und ziellos aus; einige bleiben erhalten und gelangen an ein Ziel, andere löschen sich gegenseitig durch Überlagerung aus. Das ist alles!**

... und wenn man es schlau anstellt, - z.B. mit geeignet geformten Gläsern (Linsen) - dann formen die "überlebenden" Lichtstrahlen sogar ein Bild!

Welle beschreiben kann, dann wird sofort klar, was hinter dem Variationsprinzip des optischen Weges steckt:

Gleiche Phasenlage zwischen benachbarten Lichtstrahlen bedeutet konstruktive Interferenz, d.h. durch die Überlagerung der Strahlen am Bildort werden sie sich gegenseitig verstärken.

Diejenigen optischen Wege, bei denen diese Randbedingung erfüllt ist, tragen zur Entstehung eines Bildes bei, diejenigen bei denen diese Bedingung nicht erfüllt ist sind uninteressant, weil sich die benachbarten Strahlen am Bildort auslöschen.

Ob benachbarte Strahlen zur Bildentstehung beitragen können, wird durch das "Eikonal" beschrieben, benannt nach dem griechischen Wort "ΕΙΚΩΝ" für Bild.

Mit einem übergeordneten Lenker und Planer, der in die Abläufe der Natur steuernd eingreift, mit dem Ziel, irgendeine Art von Optimierung zu erreichen, hat das wenig zu tun, - zumindest was den Weg eines Lichtstrahls betrifft!

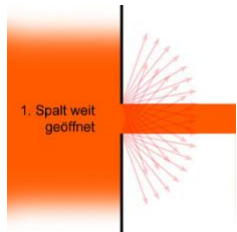
Zum Abschluss dieses Kapitels soll noch ein Gedanke von Feynman vorgestellt werden, wonach das Fermat'sche Prinzip sogar als Erklärungsgrundlage für die Beugung des Lichtes dienen kann.

In den folgenden Skizzen ist eine Blende (schwarzer senkrechter Strich) dargestellt, die von einem ausgedehnten Lichtstrahl (orange) von links getroffen wird.

Wenn der Spalt weit geöffnet ist, tritt ein breiter Lichtstrom hindurch und dahinter würde ein Detektor im Bereich des Spaltes eine bestimmte Strahlungsintensität messen können, außerhalb dieses beleuchteten Bereichs wäre der Detektor im Schatten der Blende, - die gemessene Strahlungsintensität ist annähernd Null.

(Ja, ich gebe es zu: eine ziemlich umständliche Beschreibung des Schattenwurfes einer Blende!)

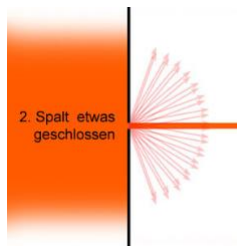
Aber der spannende Teil der Geschichte kommt jetzt:



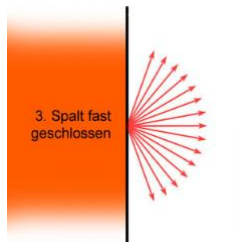
An den Kanten der geöffneten Blende entsteht ein kleiner Anteil an Streulicht, was die Ränder des hindurchtretenden Lichtbandes etwas unscharf macht, im übrigen aber keine große Auswirkung hat.

Das Streulicht vagabundiert kreuz und quer und verliert sich im Raum - die Laufwege der gestreuten Lichtstrahlen sind so unterschiedlich, dass keine konstruktive Überlagerung entstehen kann.

Man könnte auch sagen: das Eikonal ist ungleich Null!



Wenn wir den Spalt weiter schließen, dann rücken auch die Streulichtkegel dichter aneinander, aber für eine konstruktive Überlagerung (Interferenz) reicht das noch nicht ganz!



Erst wenn wir den Spalt fast schließen - konkret heißt das: die Spaltöffnung ist kleiner als die Wellenlänge - dann liegen die Streulichtkegel so dicht beieinander, dass sie sich (annähernd phasenrichtig) überlagern und damit gegenseitig verstärken können. Jetzt ist der Raum hinter der Blende zwar sehr schwach, aber einigermaßen gleichmäßig ausgeleuchtet, - wir haben **Beugung**!

Das Eikonal ist annähernd Null!

Wir haben damit auf der Basis des Fermat'schen Prinzips einen Effekt erklärt, der eigentlich erst mit den Mitteln der Wellenoptik vollständig beschrieben werden kann.

Hätten Sie gedacht, dass das Fermat'sche Prinzip soweit reicht?

Na gut - das ist eine stark vereinfachte Darstellung, um Ihnen das Prinzip zu verdeutlichen:

In der Praxis sollten Sie dieses Experiment nicht mit Licht sondern mit Mikro- bzw. cm-Wellen durchführen, um einen deutlichen Effekt zu sehen. Bei den kleinen Lichtwellenlängen – ca. 0,0005 mm müssten Sie den Spalt schon verdammt weit zudrehen um diesen gleichmäßigen Beugungseffekt zu sehen.

Und noch etwas, was in den Skizzen oben nicht richtig zum Ausdruck kommt: die Strahlungsintensität ist hinter dem Spalt natürlich recht klein, aber - und das ist der entscheidende Punkt – wenn die „Beugung“ eintritt gibt keine Schattenkante mehr!

12. Zusammenfassung - Was ist Licht?

Ganz ehrlich ... ich habe keine Ahnung!

Mit dieser Ratlosigkeit befinde ich mich in guter Gesellschaft, z.B. mit dem Nobelpreisträger Richard Feynman.

80% der Informationen über unsere Umgebung vermittelt uns das Auge, also das Licht. (<https://www.kontextlab.com/visuelle-wahrnehmung-ueber-augenmenschen-und-sinneshierarchien/>)

Seit Jahrtausenden beschäftigen sich die Menschen mit dem Licht: in der Kunst, Literatur und natürlich in der Wissenschaft: Pythagoras, Euklid, Galilei, Fizeau, Newton, Huygens, Faraday, Maxwell, Einstein, Planck; das ist nur eine kleine Auswahl von Geistesgrößen, die versuchten der Natur des Lichtes auf die Spur zu kommen! (<https://de.wikipedia.org/wiki/Licht>)

Licht gehört zu unserem Leben: Sonnenauf- und -untergang strukturieren den Tag, das Licht beeinflusst unsere Psyche und natürlich ist die Sonnenstrahlung unverzichtbar für das Wachstum der Pflanzen und für das Leben im Allgemeinen.

In der Naturwissenschaft spielen die Eigenschaften des Lichtes eine besondere Rolle. Die Herausforderung ist hier besonders groß, denn es widerspricht in vielerlei Hinsicht unseren Alltagserfahrungen. Die merkwürdigen Eigenschaften des Lichtes blieben über lange Zeit verborgen, weil sich die Eigenschaften des Lichtes der menschlichen Wahrnehmung weitgehend entzieht und erst durch die moderne Messtechnik „sichtbar“ gemacht werden konnten. So ist z.B. die Lichtgeschwindigkeit recht groß (299792,458 km /sec), aber nicht – wie in früheren Jahrhunderten häufig vermutet – unendlich. (de.wikipedia.org/wiki/Lichtgeschwindigkeit)

Die Entfernung von der Sonne zur Erde legt das Licht in etwa 8 Minuten und 20 Sekunden zurück.

Für die großen Entfernungen in unserem Universum benutzt man die Einheit „Lichtjahr“, das ist die Entfernung, die das Licht einem Jahr zurücklegt, etwa 9,4 Billionen Kilometer. Der Durchmesser des Universums beträgt etwa 93 Milliarden Lichtjahre, und die Entfernung von der Erde bis zum nächsten erdähnlichen Planeten beträgt etwa 1400 Lichtjahre. D.h. Licht das uns von diesen Orten erreicht, trägt Informationen von längst verflissenen Ereignissen.

Aber das ist erst der Anfang der „seltsamen“ Geschichte des Lichtes!

Licht existiert in (mindestens) zwei Zuständen und zwar gleichzeitig: als Teilchen oder als Welle, was lediglich von der Art der Beobachtung abhängt. Beide Erscheinungsformen sind im Experiment nachweisbar! Der Wellencharakter wird sichtbar, wenn sich zwei Wellenzüge durch Überlagerung (Interferenz) auslöschen oder verstärken, das Teilchen (Photon, Lichtquant) manifestiert sich durch den photoelektrischen Effekt, wenn es durch Auftreffen auf ein geeignetes Material einen Stromstoß auslöst.

Der Nobelpreisträger Richard P. Feynman schreibt dazu: „Natürlich werden (Sie) das ... nicht begreifen, aber ... das (ist) ganz in Ordnung. Denn wie ich Ihnen ... dargelegt habe, entzieht sich die Art und Weise, wie die Natur uns nötigt, sie zu beschreiben, unserem Verständnis ganz allgemein. (Zitat aus: QED „Die seltsame Theorie des Lichtes und der Materie“, Piper, 1990, Seite 92)

In der Erscheinungsform als Welle sollte für das Licht ein Trägermedium existieren, so wie die Luft für die Schallwelle oder das Wasser für die Wasserwelle. Die Suche nach diesen Trägermedium, man nannte es den „Lichtäther“ oder einfach „Äther“, hat die Physiker im 19. Und 20. Jahrhundert viele Jahrzehnte beschäftigt (z.B. Michelson und Morley,

<https://de.wikipedia.org/wiki/Michelson-Morley-Experiment>), war letzten Endes ergebnislos, lieferte aber den Anstoß für die Relativitätstheorie von Albert Einstein und damit den Ausgangspunkt für ein grundlegend neues Verständnis von Raum und Zeit. *)

(<https://de.wikipedia.org/wiki/Relativit%C3%A4tstheorie>)

Im Verlauf der letzten Jahrhunderte konkurrierte die Beschreibungen des Lichtes als elektromagnetische Welle (Chr. Huygens) immer wieder mit dem Bild des Partikels (I. Newton) (<https://de.wikipedia.org/wiki/Licht>), aber letztlich setzte sich in der Physik die Meinung durch, dass das Licht am besten durch die Quantenelektrodynamik „QED“ zu beschreiben ist. Die „QED“ entstand aus der Zusammenarbeit einer ganzen Reihe von Physikern, mit dem Ziel, mathematisch zu beschreiben, wie Elektronen und elektromagnetische Felder (Lichtwelle) im Experiment miteinander wechselwirken.“ (Zitat Wikipedia: <https://de.wikipedia.org/wiki/Quantenelektrodynamik> **)

Im Gegensatz zu der anspruchsvollen Quantenelektrodynamik und den - zumindest zu Einsteins Zeiten – teilweise recht widersprüchlichen Theorien zum Licht, ist das in dieser Broschüre benutzte Modell für die „Geometrische Optik“ (Strahlenoptik) in seiner Einfachheit kaum noch zu unterbieten:

Lichtwelle, oder -teilchen werden reduziert auf eine Linie (Strahl) ***) und für die Bestimmung des Strahlverlaufes wird eine

*) Experimente zu diesem Thema werden immer noch durchgeführt, s.d.:
<https://de.wikipedia.org/wiki/Michelson-Morley-Experiment>;

) Zitat Richard Feynman: „Es gab eine Zeit, als Zeitungen schrieben, nur 12 Menschen verstanden die Relativitätstheorie. Ich glaube nicht, dass es jemals eine solche Zeit gab. Auf der anderen Seite denke ich, es ist sicher zu sagen, **niemand versteht Quantenmechanik.“

***) Seite 11, **Randbedingung für die geometrische Optik:** Die Wellenlänge ist klein im Verhältnis zu den Geräteabmessungen und die Photonenenergie ist klein im Verhältnis zur Empfängerempfindlichkeit.

einzig simple Zusatzannahme benötigt, nämlich: die Gesamtlaufzeit des Lichtes durch ein System, das auch aus mehreren Medien bestehen kann (z.B. Luft, Glas, Wasser), muss ein Minimum sein (**Fermat'sche Prinzip**, s.d. Seite 12).

Daraus resultieren schließlich die Axiome aus denen sich der komplette Strahlverlauf in jedem optischen System herleiten lässt:

1. In homogenem Material sind Lichtstrahlen gerade.
2. An der Grenze zwischen zwei homogenen isotropen Materialien wird das Licht nach dem Reflexionsgesetz reflektiert und nach dem Brechungsgesetz gebrochen.
3. Jeder Strahlengang ist umkehrbar; bei Umkehrung der Richtung eines Strahls ändert sich sein Verlauf nicht.
4. Die Lichtstrahlen durchkreuzen einander, ohne sich gegenseitig zu beeinflussen.

Wie fast alle physikalischen Modelle erlaubt die „Geometrische Optik“ zwar eine vollständige mathematische (!) Beschreibung der Effekte wie Reflexion und Brechung, ansatzweise auch erste Einsichten zur Streuung und Beugung des Lichtes, liefert aber keine Erklärung über die Wirkmechanismen. Trotzdem ist dieses Werkzeug aus der Gerätetechnik (Lupe, Mikroskop, Fernrohr, Projektor, ...) nicht mehr wegzudenken.

Hier noch ein weiterer sehr wichtiger experimenteller Befund über das Licht:

Die Lichtgeschwindigkeit ist eine Grenzgeschwindigkeit, es gibt nichts, was schneller wäre!

Diese Erkenntnis war erst mit den ausgefeilten Methoden der modernen Messtechnik zugänglich.

(de.wikipedia.org/wiki/Lichtgeschwindigkeit)

Wenn man diese Beobachtung zu Ende denkt, dann kann man daraus – auch ohne aufwendigen theoretischen Überbau - schließen, dass die resultierende Geschwindigkeit z.B. eines Objektes, das von einem bewegten Trägersystem abgeschossen wird, nicht einfach die Summe der Geschwindigkeiten von Objekt und Träger sein kann, wie wir das auf Grund unserer Alltagserfahrung vermuten würden.

Das wird besonders wichtig für Geschwindigkeiten in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit, denn die Formel für die Berechnung der resultierenden Gesamtgeschwindigkeit muss berücksichtigen, dass die Endgeschwindigkeit grundsätzlich **nicht größer als die Lichtgeschwindigkeit** sein kann und darüber hinaus auch noch abhängig von der Geschwindigkeit des Beobachters ist.

Damit sind wir bereits mitten im Problemkreis der (speziellen) Relativitätstheorie, die sich von der Tatsache ableiten lässt, dass die Lichtgeschwindigkeit eine Grenzgeschwindigkeit ist.

In diesem Zusammenhang noch eine Anmerkung zur Rolle mathematischer Modelle in der Physik:

Wir haben uns daran gewöhnt physikalische Phänomene mit Hilfe von Modellen und teilweise recht willkürlichen Regeln zu beschreiben. (Kürzeste Zeit, Potentialminimum, geringster Energieverlust, ...).

Das Thema dieser Broschüre – die „geometrische Optik“ – liefert ein gutes Beispiel für ein solches „Modell“: das Licht folgt dem Fermat'schen Extremalprinzip und legt seinen Weg in der kürzest möglichen Zeit zurück. (s.d. das erste Kapitel.) Und tatsächlich können wir aus dieser Regel den zu erwartenden Strahlverlauf in einem System aus Linsen, Prismen, Spiegeln, u.s.w. konstruieren.

Weil das so ist und weil wir in der Lage sind, das Verhalten des Lichtstrahls vorherzusagen, glauben wir das Wesen des Lichtes – zumindest im Bereich der geometrischen Optik – verstanden zu

haben. Wir können sogar vorhersagen wie der Strahl in einem bislang unbekannten System aus Linsen, Spiegeln, u.s.w. verläuft – was will man mehr?

Das sollte uns aber nicht zu der Ansicht verleiten, wir hätten verstanden **warum** der Lichtstrahl gerade diesen Weg einschlägt!

Der folgende Vergleich aus einem anderen Bereich der Physik mag „hinken“, aber ich denke er trifft den Kern des Problems:

Spielen wir mal Newton (<https://hans-rutar.de/isaac-newton-apfel/>).

Wenn wir einen Apfel vom Baum fallen sehen, dann können wir sicher sein, dass der nächste Apfel einen sehr ähnlichen Weg zurücklegt, wenn er sich vom Ast löst: von oben nach unten in Richtung Erdmittelpunkt, - zumindest existiert bislang noch keine gegensätzliche Beobachtung! D.h. wir können ganz ähnlich wie beim Verlauf eines Lichtstrahls den voraussichtlichen Weg und die Geschwindigkeit voraussagen, **das heißt aber nicht, dass wir das Wesen der Schwerkraft verstanden hätten!**

Physikalische Modellvorstellungen bilden jahrtausende alte Erfahrungen im Umgang mit Naturphänomenen ab. Z.B. im Bereich Mechanik, Thermodynamik, Optik, Akustik, u.s.w. Sollten wir eine Beobachtung machen, die vom aktuell gültigen Modell nicht erfasst wird, dann muss das Modell ergänzt, - im schlimmsten Fall ausgetauscht werden.

Die Geschichte des Lichtes liefert ein anschauliches Beispiel über den ständigen Wandel der Modellvorstellungen: „kürzester Weg“ (Hero), „kürzeste Zeit“ (Fermat), „Teilchen“ (Newton), „Welle“ (Huygens), „Quant“ (Planck), „Quanten Elektrodynamik-QED“ (Feynman) und ich vermute: das ist nicht das letzte Modell zu diesem Thema!

Register:

Abbildungen	53	Ellipse	31
Abbildungsmaßstab	55, 76	Ellipsoid, Kenngrößen	30, 31, 37
Achsenhyperopie	87	Extremalprinzip	14
Achsenmyopie	86	Exzentrizität, numerische	32
Aperturblende	109, 113, 116	Fata Morgana	141
Asphärische Linsen	28	Fermat, Pierre de	138
Auflösungsvermögen des Auges	89	Fermat's Prinzip	12, 14
Auge	79, 81	Fermat'sches Prinzip, Grenzen des	138
Auge, „technische“ Daten	88	Fernglas	66
Ausbreitung von Licht	10	Fernglas, Winkelvergrößerung	66
Beleuchtungsstrahlengang, Diaprojektor	130	Fernpunkt	86
Bereich maximaler Helligkeit, Diaprojektor	126, 131, 133	Fernpunkt	92
Beugung am Spalt	146	Fokussierung von Licht	26
Bikonvex	51	Gegenstandsweite	45, 52, 54, 61
Bikonvexlinse	36	Geometrische Optik, Randbedingungen	9
Bildhelligkeit	109	Gesichtsfeld grenze, Diaprojektor	132, 133
Bildweite	45, 52, 54, 56, 61	Gesichtsfeldblende	106, 121
Blenden	105	Gesichtsfeldblende, Bestimmung	123, 130
Bikonkav	41	Gesichtsfeldgrenze	125
Brechung	12, 18, 19, 22, 25	Grenzwinkel, Totalreflexion	24
Brechungshyperopie	87	Habschattengrenze	125, 127
Brechungsindices einiger Materialien	22	Hauptebene	67, 69, 72, 74
Brechungsmypopie	86	Hero von Alexandria	10
Brennebene	59	Hyperbel, Kenngrößen	33
Brennpunkteigenschaft, Hyperbel	34	Hyperboloid	34, 37
Brennweite	49, 52, 61	Hyperopie	87
Brennweite einer Kugelfläche	44	Kondensorlinse, Diaprojektor	134
Brennweite, negativ	50	Konkave Linse	37, 50
Brille	93	Konvexe Linse	37, 50
Chambre, C.de la	18	Kugelfläche, Brechung	38
Cornea	83, 84	Kugelförmige, Linsen, Grenzflächen	38, 39, 40
Descartes, Rene	18	Kurzsichtigkeit	85, 86
Diaprojektor	128	Lampengehäuse, Diaprojektor	137
Digitalkamera	89	Lampenwendel als Aperturblende	129
Dioptrie	64, 98	Laterale Vergrößerung	55, 76
Dunkelgrenze	125, 132	Leitlinie einer Ellipse	32
Eikonal	144	Leselupe	91
Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel	17	Lesestein	91
Eintrittsluke	125	Licht als Teilchen	147
Eintrittspupille	109, 111, 112	Licht als Welle	147
Eintrittspupille im Diaprojektor	135	Lichtjahr	147
Eintrittspupille, Bestimmung	118, 119	Lichtstärke eines Objektivs	114
		Linse	27
		Linse, Auge	83
		Linse, dicke	68

Linsen, dünne	46, 47, 67	Tiefenausdehnung einer Abbildung	57
Linsengleichung	48, 62	Totalreflexion	24
Linsenrinde	83	Uhrmacherlupe	91
Linsensystem, Abbildung durch	60	Verbindung zwischen zwei Punkten	7
Linsensystem, Brennpunkt	61	Vergrößerung	55
Lochkamera	105	Verkleinerung	56
Luke	124	Verlauf eines Lichtstrahls	8
Lupe	91, 94	Virtuelles Bild	56
Lupe, Vergrößerung	96, 97	Vorkammer	83
Lupenbrennweite	94	Wärmeschutzfilter	136
Meniskuskonkav	51	Wasserglas, Ausbreitung von Licht im-	10
Meniskuskonvex	51	Weglänge, optische	23, 29
Michelson-Morley-Experiment	148	Weitsichtigkeit	87
Mikroskop	99	Winkelvergrößerung	77
Mikroskopobjektiv	100	Zentralstrahl	59
Mikroskop Okular	101	Ziliarmuskel	82
Mikroskop Vergrößerung	102	Zwischenbild im Mikroskop	100
Myopie	85		
Nahpunkt	92		
Newton'sche Abbildungsgleichung	55		
Öffnungsblende	110		
Öffnungswinkel	111		
Optische Instrumente	76		
Paraxial Strahlen	39		
Plankonkav	51		
Plankonvex	51		
Pupille	111, 112, 114		
Pupille in einem Linsensystem	115		
QED, Buch von R. Feynman	9		
Quantenelektrodynamik	8		
Quantenelektrodynamik	148		
Quantentheorie	9		
Reelles Bild	56		
Reflexion	11		
Reflexionsgesetz	15		
Schlüssellocheffekt	106		
Schnellster Weg	7		
Schnittweite	42		
Selbstleuchtende Objekte	128		
Snellius, Willebrod Snel van Rojen	18		
Sonnenuntergang	138		
Sphäroelliptische Konvexlinse	37		
Strahl, Lichtstrahl	9, 10		
Systembrennpunkt	61, 70		
Teleskopischer Strahlengang	65		

